

Hans - Heinrich Gürtler

Quantitative Modelle
zur Optimierung des Schalterverkehrs
in einem Postamt

Ein Warteschlangenproblem
mit nicht-identischen
parallelen Schaltern

1968

1969

QUANTITATIVE MODELLE ZUR OPTIMIERUNG DES
SCHALTERVERKEHRS IN EINEM POSTAMT
EIN WARTESCHLANGENPROBLEM MIT
NICHT-IDENTISCHEN PARALLELEN SCHALTERN

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster

vorgelegt von
Hans-Heinrich Gürtler
aus Königsberg

1969



Erster Berichterstatter: Prof. Dr. Herbert G ü l i c h e r
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Josef B l e y m ü l l e r
Dekan: Prof. Dr. Hellmuth St. S e i d e n f u s
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1968

Inhaltsverzeichnis

=====

	Seite
A. Einleitung	1
I. Einführung in die Problemstellung	1
II. Aufbau der Untersuchung	6
B. Allgemeine Charakterisierung von Wartesystemen	9
I. Grundstrukturen jedes Wartesystems	9
II. Einige mögliche Strukturen von Wartesystemen	11
III. Effizienzkriterien für Wartesysteme	12
C. Beschreibung des untersuchten Wartesystems ..	14
I. Gewinnung des Datenmaterials	14
II. Die Charakteristika des untersuchten Wartesystems	18
1. Die Ankunft der Kunden	18
2. Schaltergeschäfte und Bedienungszeitverteilungen	23
3. Schalterorganisation und Schlangendisziplin	31
4. Mögliche Bestimmungsgründe für die mittleren Bedienungszeiten	39
III. Modifizierungsmöglichkeiten des untersuchten Systems	41
D. Modellbildung für das untersuchte Wartesystem	44
I. Erste Modell-Gruppe: Wartesysteme mit identischen parallelen Schaltern	45
1. Modell für exponentiell verteilte Bedienungszeiten	45

	Seite
2. Modell für empirisch verteilte Bedienungszeiten	46
3. Modell für hyperexponentiell ver- teilte Bedienungszeiten	46
II. Zweite Modell-Gruppe: Wartesysteme mit nicht-identischen parallelen Schaltern	49
1. Modell für die Ist-Organisation der Schalter	49
2. Modell für die Allzweckorganisation der Schalter	50
3. Modell zur Bestimmung des Effektes der Installation zusätzlicher Zahl- kartenannahme-Maschinen	50
E. Modellösungsverfahren	52
I. Grundsätzliche Möglichkeiten der Lösung von Warteschlangenmodellen	52
II. Analytische Lösung	54
III. Analytische Näherungslösung	56
IV. Lösung durch Simulation	61
1. Ermittlung der Zwischenankunftszei- ten, der Bedienungszeiten und der Schaltergeschäfte über Zufallszahlen	61
a. Erzeugung von Pseudozufalls- zahlen	61
b. Ermittlung der Zwischenankunfts- zeiten	62
c. Ermittlung der Bedienungszeiten .	64
d. Ermittlung des Schaltergeschäftes	65
2. Ermittlung der durchschnittlichen Wartezeit	65
3. Bestimmung von Konfidenzintervallen für die mittlere Wartezeit	66
a. Autokorrelierte Wartezeiten	66

	Seite
b. Varianzreduzierungsverfahren	80
a. Die Methode der Antithetic Variates	81
ß. Varianzreduzierung durch Trans- formation der Wartezeitvertei- lung	84
4. Stabilisierungsdauer der durch- schnittlichen Wartezeit	94
5. Programmablaufplan für eine elektro- nische Rechenmaschine	96
F. Modellösung - Ergebnisse	101
I. Lösungen für verschiedene Bedienungs- zeitverteilungen - Vergleich der Ergeb- nisse	101
1. Exponentiell verteilte Bedienungs- zeiten	101
2. Empirisch verteilte Bedienungszeiten	101
3. Hyperexponentiell verteilte Bedie- nungszeiten	102
II. Ergebnisse für die Ist-Organisation der Schalter	103
1. Vergleich der durch Simulation er- mittelten mit den durch analytische Näherungslösung erhaltenen Ergeb- nissen	103
2. Überprüfung der Ergebnisse an den empirisch beobachteten Wartezeiten .	106
III. Ergebnisse für die Allzweckorganisa- tion der Schalter	110
1. Allzweckorganisation mit einer Zahl- kartenannahme-Maschine	110
2. Allzweckorganisation ohne Zahlkar- tenannahme-Maschine	115

	Seite
3. Allzweckorganisation mit zwei und mehr Zahlkartenannahme-Maschinen ...	116
IV. Bestimmung der optimalen Zahl besetzter Schalter	120
1. Bestimmung nach Kriterium 1: durchschnittliche Wartezeit kleiner gleich durchschnittliche Bedienungszeit	120
2. Bestimmung nach Kriterium 2: Minimierung der Zeit pro Abfertigung eines Kunden	122
V. Vergleich der Warte- und Schalteröffnungszeiten bei verschiedener Schalterorganisation	127
1. Für den Vergleich zugrundegelegte Verteilung der Kundenankünfte pro 30 min	127
2. Vergleich der Wartezeiten bei gleicher Zahl geöffneter Schalter	129
3. Vergleich der Warte- und Schalteröffnungszeiten bei optimaler Zahl geöffneter Schalter	134
a. Vergleich von Ist-Organisation und Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine ..	134
α. Nach Kriterium 1	134
β. Nach Kriterium 2	136
b. Vergleich von Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine	138
α. Nach Kriterium 1	138
β. Nach Kriterium 2	139
G. Zusammenfassung der Ergebnisse und Schluß ..	140

	Seite
Verzeichnis der wichtigsten Symbole	145
Verzeichnis der Abbildungen	148
Verzeichnis der Tabellen	151
Literaturverzeichnis	155

A. Einleitung

=====

I. Einführung in die Problemstellung

Einer der großen Betriebsbereiche der Post ist der Schalterdienst. Die Zahl der Schalterstellen mit einem oder mehreren regelmäßig besetzten Brief- und Geldschaltern liegt in der Bundesrepublik in der Größenordnung von mehreren tausend.

Da die Post nach dem Postverwaltungsgesetz verpflichtet ist, als wirtschaftliches Unternehmen zu arbeiten, muß sie bestrebt sein, den Schalterdienst wie jeden anderen Betriebsbereich nach dem Rationalprinzip zu gestalten. Dieses Rational- oder Wirtschaftlichkeitsprinzip fordert, " daß für eine betriebliche Aufgabe stets die günstigste Lösung gefunden werden soll"¹⁾.

Nun besteht die betriebliche Aufgabe der Schalterstellen der Postämter darin, eine Vielzahl unterschiedlicher Schaltergeschäfte der Kunden abzuwickeln. Die günstigste Lösung der Abwicklung der Schaltergeschäfte kann nicht darin bestehen, daß die Post die Kosten der Abwicklung der Schaltergeschäfte ohne Berücksichtigung des Qualitätsniveaus des Postschalterdienstes minimiert. Anders ausgedrückt muß die Post den Zeitaufwand der Postbenutzer bei der Suche nach der günstigsten Lösung einbeziehen. Dieser muß ebenso wie die Dienstzeit der Schalterbeamten als Kosten berücksichtigt werden. Als optimal ist das Qualitätsniveau anzusehen, bei dem die Gesamtkosten - diejenigen des

1) GUTENBERG, E.: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre. Wiesbaden 1958. S. 31.

Zeitaufwandes der Kunden und diejenigen des Dienstes - am geringsten sind. Der Zeitaufwand der Postbenutzer besteht nicht nur aus ihrer Wartezeit vor den Schaltern selbst. Die Postbenutzer müssen außerdem auch Zeit zum Erreichen des Postamtes aufbringen. Deshalb müßte eine Untersuchung des Gesamtbereiches "Schalterdienst" grundsätzlich eine Untersuchung der Standortverteilung der Postämter einschließen.

Sind die Standorte der Postämter jedoch vorgegeben - davon wird in dieser Untersuchung ausgegangen - , kommt es darauf an, den Betriebsablauf für jede Schalterstelle optimal zu gestalten.

Da die verschiedenen Schalterstellen sich im wesentlichen nur durch die Zahl der Schalter, die besetzt werden können, also durch ihre Größe unterscheiden, können die Erkenntnisse, die aus der Analyse des Betriebsablaufs in einer bestimmten Schalterstelle mit einer bestimmten Schalterzahl gewonnen werden, auf andere Schalterstellen übertragen werden. In der vorliegenden Arbeit wird der Betriebsablauf in einer größeren Schalterstelle analysiert. Ausgewählt wurde die Schalterstelle des Postamtes Münster 1, in der bis zu elf Schalter gleichzeitig besetzt werden können.

Die Zahl und Art der in bestimmten Zeiträumen abzuwickelnden Schaltergeschäfte ist für eine bestimmte Schalterstelle kein Aktionsparameter, sondern eine vorgegebene Größe. Die Lösung der Aufgabe, diese vorgegebene Anzahl Schaltergeschäfte bei gegebener Ausstattung der Schalter mit Maschinen mit minimalen Kosten abzuwickeln, erfordert zweierlei:

1. Eine optimale Verteilung der verschiedenen Schaltergeschäfte auf die geöffneten Schalter, also eine optimale Schalterorganisation.

2. Eine optimale Anpassung der Zahl der besetzten Schalter an die Zahl der in einem bestimmten Zeitraum abzuwickelnden Schaltergeschäfte.

Eine dritte Möglichkeit, die Kosten der Abfertigung der Kunden zu reduzieren, besteht in einer Automatisierung, d.h. Verkürzung des Bedienungsvorgangs. Auch diese Möglichkeit wird in der vorliegenden Arbeit in die Überlegungen einbezogen.

Die in der Untersuchung angewandten Verfahren und Methoden sind dem Untersuchungsgegenstand entsprechend zu einem großen Teil der Warteschlangentheorie¹⁾ zuzuordnen. Die Literatur über Warteschlangenprobleme ist in den letzten Jahren sehr umfangreich geworden²⁾. Bis auf wenige Ausnahmen wurden jedoch Systeme untersucht, in denen die Bedienstationen identisch sind und die Bedienungseinheiten in einer einzigen geordneten Wartelinie vor den Bedienstationen warten. Wenig Aufmerksamkeit ist Systemen gewidmet worden, in denen die Bedienstationen nicht identisch sind und die Bedienungseinheiten andere Strategien verfolgen, als sich in einer geordneten Warteschlange für alle Bedienstationen anzustellen. GUMBEL³⁾ hat den Fall untersucht, in dem die Bedienungseinheiten an verschiedenen parallelen Schaltern nicht mit gleichen, sondern

1) Auch die Bezeichnung "Bedienungstheorie" ist gebräuchlich. Im Englischen wird der Ausdruck "Queueing Theory" verwendet.

2) Siehe die Bibliographie bei SAATY, Th. L.: Elements of Queueing Theory. New York - Toronto - London 1961. und Derselbe: Seven More Years of Queues. In: Naval Research Logistics Quarterly 13 (1966). S. 447 - 476.

3) GUMBEL, H.: Waiting Lines with Heterogeneous Servers. In: Operations Research 8 (1960). S. 504 - 511.

mit unterschiedlichen Bedienungsraten abgefertigt werden. KRISHNAMOORTHY¹⁾ und KOENIGSBERG²⁾ haben Systeme untersucht, in denen die Bedienungseinheiten außerdem nicht in einer geordneten Wartelinie vor den Bedienstationsstationen warten, sondern mit dem Ziel, ihre Wartezeiten zu reduzieren, andere Strategien verfolgen.

Alle diese für praktische Zwecke schon schwierig zu handhabenden Modelle setzen aber immer noch voraus, daß die Bedienungseinheiten an allen Bedienstationsstationen bedient werden können (full availability). Die Besonderheit des untersuchten Schaltersystems liegt jedoch darin, daß nicht jeder Kunde an jedem Schalter bedient werden kann (limited availability). Dieser Umstand und die Beschaffenheit der Bedienungszeitverteilungen machen eine analytische Behandlung des Systems praktisch unmöglich und lassen die Anwendung von Simulationsverfahren als zweckmäßig erscheinen. Zur Idee der Anwendung von Verfahren der Warteschlangentheorie und von Simulationsverfahren im Postschalterdienst sei auch GÖTTNER zitiert³⁾:

"Die Bedienungstheorie erlangt in den verschiedensten Wirtschaftsbereichen immer mehr Bedeutung. Es ist erfolgversprechend, Teilprozesse bzw. Einrichtungen des Postverkehrs unter bedienungstheoretischen Aspekten

1) KRISHNAMOORTHY, B.: On a Poisson Queue with two Heterogeneous Servers. In: Operations Research 11 (1963). S. 321 - 330.

2) KOENIGSBERG, E.: On Jockeying in Queues. In: Management Science (Series A) 12 (1966). S. 412 - 436.

3) GÖTTNER, R.: Probleme einer Postverkehrstheorie (Teil 2). In: Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Verkehrswesen "Friedrich List" in Dresden 33 (1965). S. 544.

zu untersuchen ... [Es] müssen im Postbetrieb statistische ... Primärerfassungen vorgenommen werden. Es muß untersucht werden, in welchen Fällen stochastische Prozesse vorliegen. Der Gedanke, die experimentelle Wahrscheinlichkeitsrechnung (Monte-Carlo-Methode) hier anzuwenden, liegt nahe. Im Fernmeldewesen sind theoretische Verkehrsabläufe auf elektronischen Rechenautomaten (Simulation) schon erfolgreich nachgebildet worden. Im Postwesen sind entsprechende Forschungen notwendig ... Vornehmlich wird hierbei gedacht an die Anwendung der Warteschlangentheorie für Untersuchungen im Annahmedienst ... Bei allen aus der Bedienungstheorie sich ergebenden Aufgaben kommt es insbesondere darauf an, mit mathematischen Methoden die wesentlichen Charakteristika der Bedienungsprozesse quantitativ zu ermitteln, um qualitative Schlußfolgerungen über das Funktionieren der Bedienungssysteme ziehen zu können."

II. Aufbau der Untersuchung

Nach einer kurzen allgemeinen Charakterisierung der Eigenschaften und nach Aufführung einiger Varianten von Wartesystemen in Abschnitt B werden in Abschnitt C die empirisch gefundenen und quantitativ ermittelten wesentlichen speziellen Eigenschaften des untersuchten Wartesystems dargelegt: Kundenankünfte und Zwischenankunftszeitverteilung, Schaltergeschäfte und Bedienungszeitverteilungen, Schalterorganisation und Warteschlangendisziplin. Anschließend werden die hauptsächlichen Modifizierungsmöglichkeiten des untersuchten Schaltersystems aufgezeigt.

Von den in C dargelegten Spezifikationen ausgehend erfolgt in Abschnitt D die modellmäßige Einordnung und Fixierung des untersuchten Wartesystems. Es werden mehrere, unterschiedlichen Zwecken dienende Modelle gebildet, von denen ein Teil einer einfachen analytischen Lösung zugänglich ist, die anderen dagegen wegen ihrer komplizierteren Struktur durch Anwendung von Simulationsverfahren gelöst werden müssen. Diese Modelle sollen es ermöglichen, die durchschnittlichen Wartezeiten der Kunden als Funktion unterschiedlicher Bedienungszeitverteilungen, unterschiedlicher Verteilung der Schaltergeschäfte auf die Schalter (Schalterorganisation), unterschiedlicher Zahl installierter Maschinen, mit denen eine Verkürzung der Bedienungszeiten erzielt werden kann, unterschiedlicher Zahl pro 30 min ein-treffender Kunden und unterschiedlicher Zahl besetzter Schalter zu ermitteln.

In Abschnitt E werden Verfahren zur Modelllösung diskutiert: Zunächst werden einige Ergebnisse der analytischen Warteschlangentheorie wiedergegeben. Dann wird der Versuch unternommen, eine einfache analytische Näherungslösung für ein System zu entwickeln, in dem

die Schalter wie in dem vorgefundenen Schaltersystem teilweise auf bestimmte Schaltergeschäfte spezialisiert sind.

Der Lösung durch Simulation ist in diesem Abschnitt der breitere Raum gewidmet. Nach Darstellung der Verfahren, mit Hilfe derer der Warteprozess (mit oder ohne Einsatz einer elektronischen Rechanlage) nachgebildet werden kann, wird das Problem der Bestimmung von Konfidenzintervallen für die durchschnittliche Wartezeit erörtert. Es wird gezeigt, daß die Varianz der mittleren Wartezeit wegen Autokorrelation der Wartezeiten der Kunden nicht auf dem "klassischen" Wege bestimmt werden kann. Es wird der Versuch unternommen, den Einfluß der Autokorrelation auf die Größe der Konfidenzintervalle für die durchschnittliche Wartezeit quantitativ zu ermitteln. Mit den Ergebnissen dieses Versuchs wird die Notwendigkeit des Einsatzes einer elektronischen Rechanlage deutlich gemacht. Außerdem werden Varianzreduzierungsverfahren dargestellt, durch deren Anwendung die Simulation effizienter durchgeführt werden kann.

Dieser Abschnitt über die Modellösungsverfahren schließt mit einer Darstellung des Programmablaufplans für eine elektronische Rechanlage.

In Abschnitt F werden die mit den in Abschnitt E beschriebenen und entwickelten Verfahren erzielten Ergebnisse dargelegt. Mit diesen werden entsprechend der Zielsetzung der Untersuchung die bei verschiedener Organisation der Schalter und verschiedener Zahl zur Verkürzung der Bedienungszeiten installierter Maschinen in Dienstzeiten der Schalterbeamten und in Wartezeiten der Kunden ausgedrückten Kosten der Abfertigung der Kunden für verschiedene Zahl pro halbe Stunde eintreffender Kunden ermittelt und verglichen. Die optimale

Zahl zu besetzender Schalter wird für jede Zahl abzufertigender Kunden angegeben.

Außerdem erfolgt in diesem Abschnitt eine Überprüfung der modellmäßig erzielten Ergebnisse an den bei der vorgefundenen Organisation der Schalter empirisch beobachteten Wartezeiten.

Einige Ausführungen im letzten Abschnitt G schließlich dienen der Zusammenfassung der Ergebnisse.

B. Allgemeine Charakterisierung von Wartesystemen¹⁾ =====

I. Grundstrukturen jedes Wartesystems

Jedes Wartesystem kann durch Eigenschaften mindestens folgender drei Charakteristika beschrieben werden:

1. die eintreffenden Einheiten
2. die Bedienungseinrichtung, durch die die Einheiten abgefertigt werden
3. die Warteschlange.

Ein Wartezeitproblem tritt nur dann auf, wenn entweder die zu bedienenden Einheiten oder die Bedienungseinrichtungen eine Leerzeit durchmachen, d.h. warten. Zu dem Phänomen der Entstehung von Wartezeiten bzw. der Bildung von Warteschlangen kommt es in jedem System durch die Irregularitäten des Systems und nicht durch seine durchschnittlichen Eigenschaften. Sind in einem Bedienungssystem sowohl die Bedienungszeiten als auch die Abstände zwischen den Ankünften der Bedienungseinheiten konstant, dann können Wartezeiten solange nicht

1) Über Einzelheiten siehe insbesondere COX, D. R., L. SMITH: Queues. London - New York 1961. - KAUFMANN, A., R. CRUON: Les phénomènes d'attente. Paris 1961. - LEE, A. M.: Applied Queueing Theory. London 1966. - MORSE, P.: Queues, Inventories and Maintenance. New York 1958. - ROSENBERG, W. J., A. I. PROCHOROW: Einführung in die Bedienungstheorie. Leipzig 1964. - SAATY, Th. L.: Elements of Queueing Theory. a.a.O. - SAATY, Th. L.: Mathematical Methods of Operations Research. New York - Toronto - London 1959. S. 331 - 374. - SASIENI, M., A. YASPER und L. FRIEDMANN: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung. Operations Research. Würzburg 1967. S. 134 - 163. - SCHNEEWEISS, H.: Zur Theorie der Warteschlangen. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung NF 12 (1960). S. 471 - 507.

entstehen, wie die Kapazität der Bedienungseinrichtung ausreicht, um alle eintreffenden Einheiten abzufertigen. Reicht die Kapazität nicht aus, bildet sich eine ständig wachsende Warteschlange. Bei Unregelmäßigkeiten im Ankunfts- und/oder Abfertigungsprozeß dagegen wird immer mit einer gewissen endlichen Wahrscheinlichkeit eine Warteschlange gebildet. "Ihre durchschnittliche Länge kann aus Ankunftsrate und Abfertigungsrate allein nicht erschlossen werden; vielmehr muß hierzu das ganze Wahrscheinlichkeitsgesetz der beiden Prozesse Ankunft und Abfertigung bekannt sein. Die Schlange erscheint so als das Ergebnis eines stochastischen Prozesses, der von zwei einfacheren, im allgemeinen unabhängigen Prozessen erzeugt wird ..."¹⁾.

In dem Grenzfall, in dem die Ankunftsrate gerade gleich der Abfertigungsrate ($\lambda = \mu$) ist, bei deterministischer Betrachtungsweise die Bedienungskapazität also gerade noch ausreicht, besteht die Tendenz zu einer ständig wachsenden Warteschlange, deren Länge im Laufe der Zeit gegen unendlich geht. Das läßt sich damit erklären, daß aufgrund der Streuung der Ankunfts- und Bedienungszeiten mögliche Verzögerungen in den Ankünften und Beschleunigungen bei den Abfertigungen die Bedienstationen für einige Zeit leerstehen lassen. Diese Leerzeit ist verloren, da sie nicht "gelagert" werden kann, bis beschleunigte Ankünfte und/oder verzögerte Abfertigungen zum Aufbau einer Warteschlange geführt haben.

Ist die Ankunftsrate geringer als die Abfertigungsrate, spielt sich nach einer gewissen Zeit ein "stabiler"

1) SCHNEEWEISS, H.: Zur Theorie der Warteschlangen. a.a.O. S. 475.

Zustand der Warteschlange ein, wenn Ankünfte und Abfertigungszeiten unabhängig von der Zeit sind. Dieser "stabile" oder "stationäre" Zustand besagt nicht, daß die Schlangenlänge konstant bleibt. Er besagt jedoch, daß die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Schlangenlänge von der Zeit unabhängig und konstant ist.

II. Einige mögliche Strukturen von Wartesystemen

Es gibt eine Vielzahl unterschiedlich strukturierter Wartesysteme. Einige Varianten für die Ankunft und Abfertigung der Einheiten und für die Schlangendisziplin sind folgende¹⁾:

1. Die Ankunft der Einheit

- a. Sie kann stationär oder zeitabhängig sein.
- b. Sie kann stochastisch oder regelmäßig erfolgen.
- c. Sie kann von der Schlangenlänge abhängig sein.
- d. Sie kann beeinflußbar sein.
- e. Die Zwischenankunftszeiten können den verschiedensten Verteilungsgesetzen gehorchen.
- f. Die Menge der potentiellen Kunden kann endlich oder unendlich sein.

2. Die Abfertigung der Einheit

Es sind die gleichen Varianten wie unter 1.a. bis 1.e. möglich. U.a. kann folgendes hinzukommen:

- a. Es kann eine oder es können mehrere Bedienstationen vorhanden sein.

1) Die aufgeführten Varianten können nur einen Überblick geben. Vgl. u.a. SAATY, Th. L.: Elements of Queueing Theory. a.a.O. S. 9 - 14 und SCHNEEWEISS, H.: Zur Theorie der Warteschlangen. a.a.O. S. 489.

- b. Wenn von den eintreffenden Einheiten verschiedenartige Forderungen an die Bedienungsstationen gestellt werden, können die Abfertigungszeiten für jede Forderung dem gleichen oder verschiedenen Verteilungsgesetzen gehorchen. Weiterhin kann entweder jede Forderung an jeder Bedienungsstation erfüllt werden (full availability) oder nur an einem Teil der Bedienungsstationen (limited availability).
 - c. Die durchschnittliche Bedienungszeit kann für jede Forderung an jeder Bedienungsstation gleich oder verschieden sein.
3. Die Schlangendisziplin
- a. Die Schlange kann sich in einer oder in mehreren Linien formieren, oder sie kann aus einem ungeordneten Haufen bestehen, aus dem wahllos Einheiten herausgegriffen werden.
 - b. Einheiten können vorzeitig aus der Schlange ausscheiden. Die Zeit, die eine Einheit zu warten gewillt ist, kann nach oben begrenzt sein (impatient customers).
 - c. Es können Prioritäten bei der Abfertigung bestehen.

III. Effizienzkriterien für Wartesysteme

Folgende Hauptkriterien für die Messung der Effizienz von Wartesystemen sind zu unterscheiden:

1. Der Mittelwert und die Verteilung der Zahl der Kunden in einem Wartesystem
2. Der Mittelwert und die Verteilung der Wartezeiten der Kunden in einem Wartesystem.

Diese Kriterien sind nicht unabhängig voneinan-

der: Die durchschnittliche Zahl der Kunden, die in einem Wartesystem warten, ist gleich dem Produkt aus Ankunftsrate und durchschnittlicher Wartezeit¹⁾.

Der Untersucher von Wartesystemen ist in der Regel, je nach den Besonderheiten des zu untersuchenden Systems, nur an einem dieser Kriterien interessiert. Er wird z.B. dann hauptsächlich an der Verteilung der Zahl der Kunden in einem Wartesystem interessiert sein, wenn der zur Verfügung stehende Warteraum so beschränkt ist, daß der Fall eintreten kann, daß Kunden keinen Wartepplatz finden und das Wartesystem nicht betreten können. Die Wartezeit, insbesondere die durchschnittliche Wartezeit der Kunden ist immer dann von Interesse, wenn die mit ihr verbundenen Kosten im Vordergrund stehen.

1) Siehe zum Beweis LITTLE, J.D.C.: A Proof for the Queueing Formula: $L = \lambda W$. In: Operations Research 9 (1961). S 383 - 387.

C. Beschreibung des untersuchten Wartesystems

I. Gewinnung des Datenmaterials

Für die Untersuchung wurde die Schalterstelle des Postamtes Münster 1 ausgewählt, in der bis zu elf Schalter gleichzeitig geöffnet werden können¹⁾.

Als Untersuchungszeitraum wurde die Woche vom 20. bis zum 25. Juni 1966 bestimmt.

Zur Erhebung der für die Untersuchung erforderlichen Daten über Kundenankünfte, Schaltergeschäfte und Bedienungszeitverteilungen mußten so viele Zeitnehmer zur Verfügung stehen, daß an jedem geöffneten Schalter mindestens einer postiert werden konnte. Andernfalls hätte nicht die Zahl der in einem bestimmten Zeitraum insgesamt in der Schalterstelle eintreffenden Kunden ermittelt werden können.

Jeder Zeitnehmer war mit einer Stoppuhr ausgerüstet, die auf einer Skala 1/100 Minuten und auf einer zweiten volle Minuten anzeigte. Auf vorbereiteten Erhebungsformularen (siehe Abbildung 1) wurde für jeden Kunden der Zeitpunkt seiner Ankunft vor einem der Schalter, der Zeitpunkt des Beginns seiner Bedienung und sein Schaltergeschäft notiert.

Als Ende der Bedienungszeit wurde nicht der Zeitpunkt bestimmt, zu dem der Kunde den Schalter verließ, sondern der, zu dem von dem Schalterbeamten alle Arbeiten erledigt waren, die mit der Bedienung des Kunden

1) Im Untersuchungszeitraum waren jedoch, wie später gezeigt wird, höchstens acht Schalter gleichzeitig geöffnet.

[illegible]

zusammenhängen (z.B. Weglegen von Arbeitsmaterial)¹⁾.
Wollte ein Kunde mehrere Schaltergeschäfte an einem Schalter erledigen, wurden die Zeitpunkte des Beginns und des Endes der Bedienung für die verschiedenen Schaltergeschäfte gesondert festgehalten, um die Dauer der Bedienungszeiten für die verschiedenen Schaltergeschäfte ermitteln zu können.

Die Dauer der Bedienungszeiten kann aus den Erhebungsformularen berechnet werden als Differenz zwischen dem Zeitpunkt des Endes und dem Zeitpunkt des Beginns der Bedienung (siehe Abbildung 1).

Kunden, die verschiedene Schaltergeschäfte erledigen wollten, dieses aber wegen der Beschränkung der Verfügbarkeit der Schalter auf nur einen Teil der Schaltergeschäfte nicht konnten, mußten als verschiedene Kunden erfaßt werden. Die insgesamt festgehaltenen 17156 Bedienungszeiten wurden deshalb 17156 verschiedenen Kunden mit jeweils nur einem Schaltergeschäft zugerechnet. Es wird dabei von der Vorstellung ausgegangen, daß statt Kunden Schaltergeschäfte in der Schalterstelle "eintreffen"²⁾.

1) In der Literatur wird unterschieden zwischen "service-time" und "block-time". Die ermittelten Bedienungszeiten sind mit "block-times" in den Fällen gleichzusetzen, in denen die Nebenarbeiten von den Schalterbeamten nicht zu den Zeiten erledigt wurden, in denen sie keine Kunden bedienen mußten.

2) Dieses vereinfachende Vorgehen kann nur dann Konsequenzen für die Verteilung der entstehenden Wartezeiten und für die in dieser Untersuchung als Effizienzkriterium verwendete durchschnittliche Wartezeit haben, wenn es spezialisierte Schalter gibt. Soweit in dieser Untersuchung spezialisierte Schaltersysteme betrachtet werden, werden die für diese ermittelten Wartezeiten somit geringfügig niedriger liegen als zu erwarten wäre, wenn berücksichtigt würde, daß es Kunden gibt, die mehrere Schaltergeschäfte erledigen wollen.

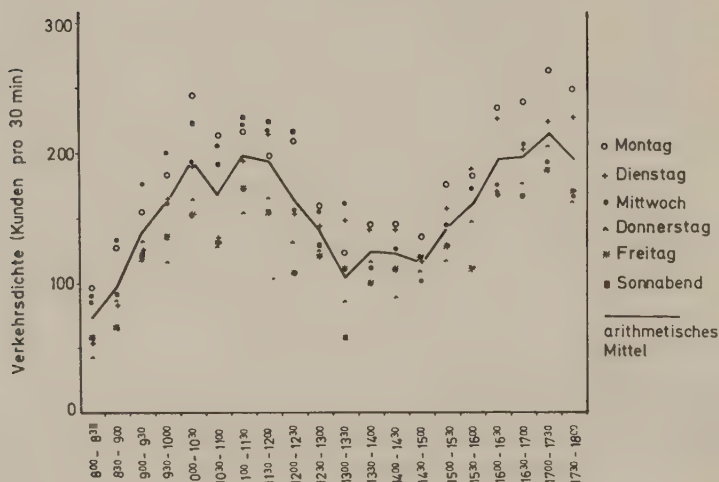
Abbildung 1 zeigt ein für einen bestimmten Schalter ausgefülltes Erhebungsformular für ein Zeitintervall von einer halben Stunde. Die in der Zeile für die Schaltergeschäfte eingetragenen Buchstaben und Zahlen sind Verschlüsselungen für verschiedene Arten von Schaltergeschäften.

II. Die Charakteristika des untersuchten Wartesystems

1. Die Ankunft der Kunden

Die Zahl der in der Schalterstelle eintreffenden Kunden wurde für halbstündige Intervalle ausgezählt. Abbildung 2 und Tabelle 1 zeigen, daß sie nicht unabhängig von der Tageszeit ist.

Abbildung 2 - Kundenankünfte pro 30 Minuten



An jedem Tag ist ein Anstieg der Kundenzahl in den Vormittagsstunden und Spätnachmittagsstunden und ein Rückgang in den Mittagsstunden zu beobachten.

Obwohl die Zahl der Kundenankünfte nicht unabhängig von der Tageszeit ist, kann angenommen werden, daß sie sich

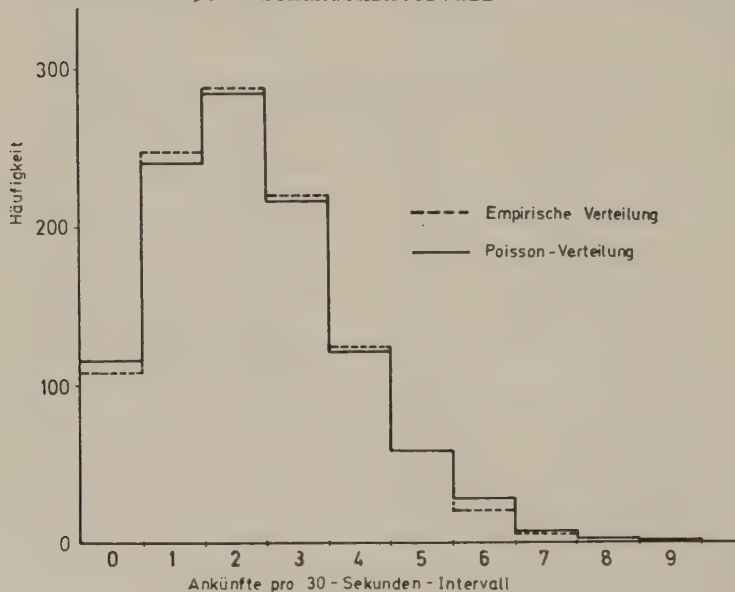
Tabelle 1 - Kundenankünfte pro 30 Minuten

Wochentag Zeit- intervall	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
8 ⁰⁰ - 8 ³⁰	97	52	90	43	57	90
8 ³⁰ - 9 ⁰⁰	127	82	134	87	66	90
9 ⁰⁰ - 9 ³⁰	154	126	177	133	119	125
9 ³⁰ - 10 ⁰⁰	183	165	209	116	135	163
10 ⁰⁰ - 10 ³⁰	244	189	193	164	152	222
10 ³⁰ - 11 ⁰⁰	214	135	206	128	132	190
11 ⁰⁰ - 11 ³⁰	218	192	222	155	173	228
11 ³⁰ - 12 ⁰⁰	198	213	217	166	154	225
12 ⁰⁰ - 12 ³⁰	209	152	153	131	108	217
12 ³⁰ - 13 ⁰⁰	159	143	157	125	121	128
13 ⁰⁰ - 13 ³⁰	122	148	160	86	110	58
13 ³⁰ - 14 ⁰⁰	145	145	111	114	99	
14 ⁰⁰ - 14 ³⁰	146	140	126	89	110	
14 ³⁰ - 15 ⁰⁰	136	115	100	109	118	
15 ⁰⁰ - 15 ³⁰	176	156	145	118	127	
15 ³⁰ - 16 ⁰⁰	182	184	172	148	110	
16 ⁰⁰ - 16 ³⁰	234	224	176	172	170	
16 ³⁰ - 17 ⁰⁰	239	200	202	177	166	
17 ⁰⁰ - 17 ³⁰	263	221	191	207	186	
17 ³⁰ - 18 ⁰⁰	249	223	166	165	167	

innerhalb von Intervallen von einer halben Stunde stationär verhält.

In Abbildung 3 ist für eine Stichprobe von 1100 halben Minuten die Verteilung der Ankünfte pro 30 Sekunden dargestellt. Diese Verteilung bezieht sich auf eine

Abbildung 3 - Häufigkeitsverteilung der Ankünfte pro 30 - Sekundenintervall



durchschnittliche Verkehrsdichte von 138 Kunden pro 30 Minuten. Die Ankunftsrate¹⁾ beträgt 2,3 Kunden pro

1) Die Ankunftsverteilungen der verschiedenen Kundentypen können zum Vergleich der empirischen Verteilung mit einer Poissonverteilung zusammengefaßt werden, da die Poissonverteilung die Eigenschaft der Reproduktivität besitzt: Wenn n Zufallsvariable $X_1, X_2, \dots, X_n$ poissonverteilt sind mit den Parametern (Ankunftsrate) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, so ist die Summe der Zufallsvariablen $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ebenfalls poissonverteilt, und zwar mit dem Parameter (der Ankunftsrate) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

30 - Sekunden-Intervall und die Standardabweichung 1,51 Kunden. Der empirischen Verteilung ist eine Poisson-Verteilung mit gleichem Mittelwert gegenübergestellt. Ein χ^2 - Test zeigt, daß die empirische Verteilung sehr gut durch eine Poisson-Verteilung beschrieben werden kann¹⁾. Es ergibt sich ein Wert für χ^2 von 3,1 bei 8 Freiheitsgraden. Bei Zugrundelegung eines Signifikanzniveaus von 0,05 kann die Hypothese, es handle sich um eine Poisson-Verteilung, nicht abgelehnt werden.

Für poissonische Ströme gilt²⁾:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Zeitabschnitt der Länge t k Kunden eintreffen, ist

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

$P_k(t)$ hängt außer von t nur von dem Parameter des Stromes λ ab. Der Parameter λ ist gleich der mathematischen Erwartung für die Anzahl der Kunden, die in der Zeiteinheit im System eintreffen. Das Zeitintervall, das zwischen dem Eintreffen zweier aufeinander-

1) Der χ^2 - Wert ist durch den Ausdruck

$$\chi^2 = \sum (h_o - h_t)^2 / h_t$$

gegeben, wobei h_o die beobachtete Häufigkeit und h_t die theoretische^o Häufigkeit ist. Wenn diese Werte berechnet worden sind, kann man die zugehörige Wahrscheinlichkeit der χ^2 - Verteilung nachschlagen. Ist der ermittelte Wert für χ^2 größer als der einem Signifikanzniveau von 0,05 entsprechende, tabellierte Wert für χ^2 , wird die Anpassung im allgemeinen als unbefriedigend betrachtet.

2) Vgl. GNEDENKO, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 4. Aufl. 1965. S. 274ff.

folgenden Kunden vergeht, ist eine zufällige Größe τ . Das Ereignis $\tau > t$ ist gleichbedeutend damit, daß im Zeitintervall t kein Kunde eintrifft, d.h.

$$P\{\tau > t\} = e^{-\lambda t} .$$

Die Verteilungsfunktion der Zwischenankunftszeiten ist daher

$$F(t) = P\{\tau < t\} = 1 - e^{-\lambda t} . \quad (1)$$

Der Parameter λ , der in dieser negativen Exponentialverteilung auftritt, kann einfach interpretiert werden: $1/\lambda$ ist die durchschnittliche Zwischenankunftszeit.

Die Dichtefunktion dieser Verteilung ist

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} . \quad (2)$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen Zwischenankunftszeit (T_a) ist

$$E(T_a) = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} . \quad (3)$$

Die Varianz der Zufallsvariablen T_a beträgt

$$V(T_a) = \int_0^{\infty} [t - E(T_a)]^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} . \quad (4)$$

2. Schaltergeschäfte und Bedienungszeitverteilungen

Es sind folgende 31 Schaltergeschäfte vorgekommen:

1. Abgabe von Postwertzeichen
2. Abgabe von Wertkarten für Absenderfreistempler
3. Einstellen von Vorgabebeträgen für Absenderfreistempler
4. Abgabe von Versicherungsmarken
5. Abgabe von Wechselsteuermarken
6. Erstattungen
7. Annahme von gewöhnlichen Briefsendungen
8. Annahme von Briefsendungen mit Wertangabe
9. Annahme von eingeschriebenen Briefsendungen
10. Annahme von gewöhnlichen Päckchen
11. Annahme von eingeschriebenen Päckchen
12. Annahme von eingeschriebenen Briefsendungen von Selbstbuchern
13. Annahme von Briefsendungen mit Wertangabe von Selbstbuchern
14. Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten (Inland) ohne Maschine
15. Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten (Inland) mit Maschine
16. Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten (Ausland)
17. Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten von Großeinzahlern in besonderen Räumen
18. Ausstellen von Postsparkbüchern
19. Einlagen im Postsparkassendienst
20. Rückzahlungen im Postsparkassendienst
21. Änderungen in Postsparkbüchern
22. Erledigung von Schriftwechsel im Postsparkassendienst
23. Rundfunk- und Zeitungsdienst
24. Vermittlung von Gesprächen
25. Annahme von Telegrammen
26. Auskünfte
27. Geldwechselgeschäfte

- 28. Personalzahlungen
- 29. Eröffnen von Postscheckkonten
- 30. Reihengespräche
- 31. Erstattung von Ferngesprächen

Die Schaltergeschäfte 6, 13, 30 und 31 traten in dem beobachteten Zeitraum seltener als dreimal auf und wurden deshalb vernachlässigt.

Da nicht alle Schaltergeschäfte an allen Schaltern erledigt wurden, war eine Zusammenfassung von Schaltergeschäften nur dann möglich, wenn sie an allen Schaltern, die überhaupt für sie verfügbar waren, kombiniert bearbeitet wurden.

Die nach der Zusammenfassung verbleibenden 20 Schaltergeschäfte sind mit ihren Häufigkeiten und mit den Mittelwerten und Standardabweichungen der zugehörigen Bedienungszeiten in Tabelle 2 (S. 25) dargestellt. Die Häufigkeitsverteilungen der Bedienungszeiten für die Schaltergeschäfte sind Tabelle 3 (S. 26) zu entnehmen. In den Abbildungen 4 bis 7 (S. 27f.) sind einige dieser Bedienungszeitverteilungen dargestellt.

Sowohl bei Schaltergeschäft 2 als auch bei Schaltergeschäft 20 handelt es sich um die Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten. Abbildung 4 zeigt die relative Häufigkeitsverteilung für maschinelle und Abbildung 5 für manuelle Annahme.

In Abbildung 6 und 7 sind zwei Bedienungszeitverteilungen gegenübergestellt, die sich in charakteristischer Weise unterscheiden. Die Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 3, Auskünfte und Geldwechsel, hat eine Standardabweichung, die höher ist als das arithmetische Mittel der Bedienungszeiten.

Bei der Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 5, Postsparkassendienst, ist dagegen die Standardabweichung der Bedienungszeiten wesentlich geringer als die durchschnittliche Bedienungszeit.

Tabelle 2 - Schaltergeschäfte, relative Häufigkeit der Schaltergeschäfte, arithmetische Mittel und Standardabweichungen der Bedienzeiten

Nr.	Schaltergeschäft	relative Häufigkeit [vH]	arithmetisches Mittel [1/100 min]	Standardabweichung [1/100 min]
1	Abgabe von Postwertzeichen	35,88	44,75	32,94
2	Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten mit Maschine	16,65	54,26	37,91
3	Auskünfte und Geldwechselgeschäfte	14,53	51,37	78,39
4	Annahme von gewöhnlichen Briefsendungen und Päckchen	8,26	64,61	44,28
5	Einlagen und Rückzahlungen im Postsparkassendienst/Änderungen im Postspargbuch	7,76	194,40	87,44
6	Annahme von eingeschriebenen Briefsendungen und Päckchen	5,27	104,29	84,61
7	Vermittlung von Gesprächen	4,09	51,36	66,13
8	Annahme von Telegrammen	1,27	191,67	197,43
9	Abgabe von Wertkarten für Absenderfreistempel, Versicherungsmarken und Wechselsteuermarken	1,02	185,70	146,98
10	Personalzahlungen	0,78	103,41	66,38
11	Rundfunk- und Zeitungsdienst	0,70	217,89	84,29
12	Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten (Ausland)	0,41	366,81	261,67
13	Einstellen von Vorgabebeträgen für Absenderfreistempel	0,32	223,68	87,29
14	Annahme von eingeschriebenen Briefsendungen von Selbstbuchern	0,29	140,10	101,52
15	Annahme von Briefsendungen mit Wertangabe	0,13	211,58	135,04
16	Ausstellen von Postspargbüchern	0,12	622,75	305,63
17	Erliegung von Schriftwechsel im Postsparkassendienst	0,11	379,44	250,08
18	Öffnen von Postscheckkonten	0,08	403,83	353,76
19	Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten von Grobeinzahlern in besonderen Räumen	0,04	358,62	183,61
20	Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten ohne Maschine	2,29	108,26	96,73

Abbildung 4 - Empirische Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 2 (Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten mit Maschine)

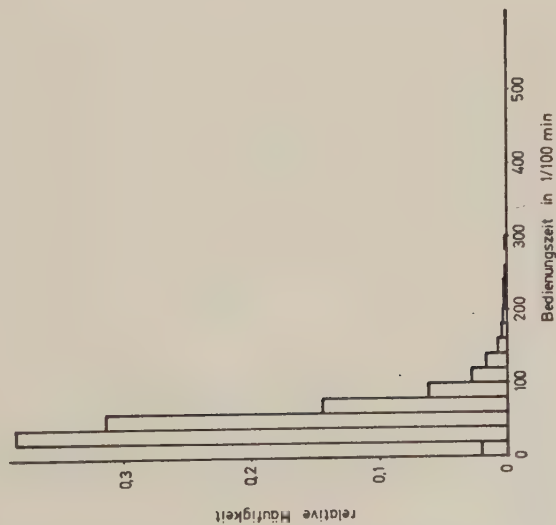


Abbildung 5 - Empirische Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 20 (Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten ohne Maschine)

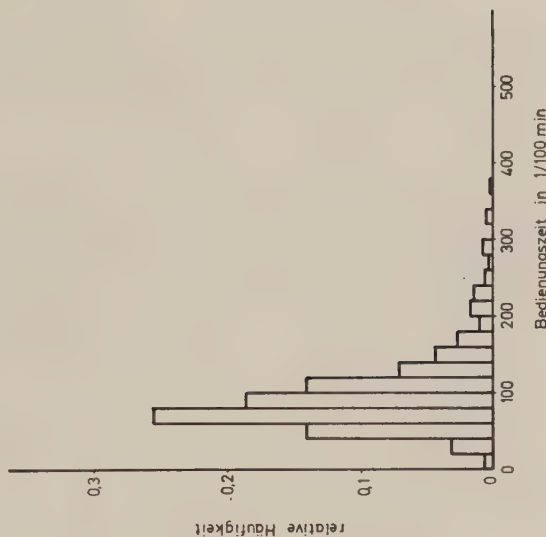


Abbildung 6 - Empirische Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 3 (Auskünfte und Geldwechselgeschäfte)

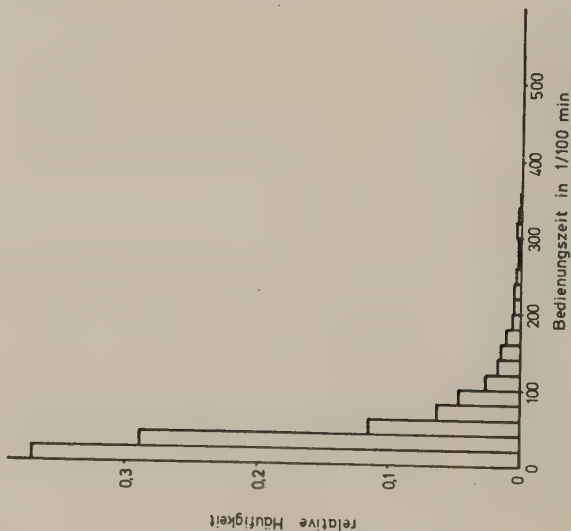
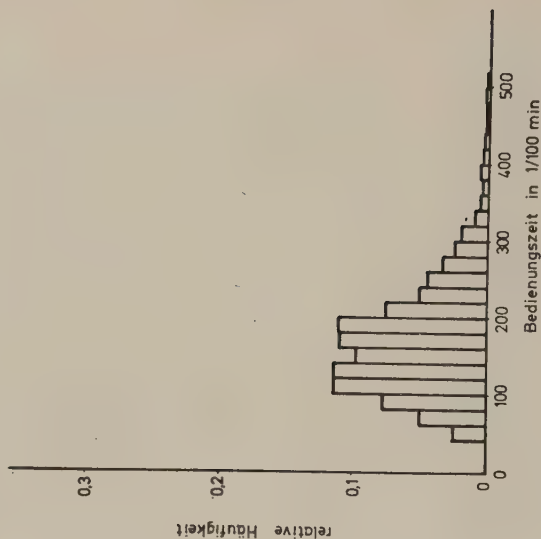


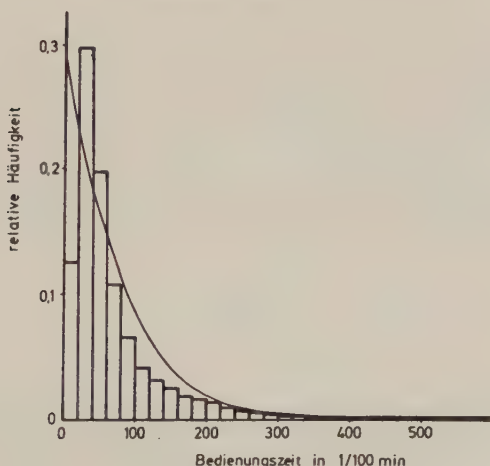
Abbildung 7 - Empirische Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 5 (Einlagen und Rückzahlungen im Postsparkassendienst/Änderungen im Postsparkbuch)



Insgesamt ist für 17 der 20 Schaltermgeschäfte die Standardabweichung der Bedienungszeiten geringer als das jeweilige arithmetische Mittel (siehe Tabelle 2, S. 25).

Die Bedienungszeitverteilung für alle Schaltermgeschäfte gemeinsam ist in Abbildung 8 dargestellt. Bei dieser liegt die Standardabweichung mit 0,851 min nicht wesentlich über der durchschnittlichen Bedienungszeit von 0,731 min¹⁾. Dies legt die Möglichkeit einer Beschreibung der empirischen Bedienungszeitverteilungen durch eine einzige negative Exponentialverteilung nahe. Letztere ist in Abbildung 8 der empirischen Verteilung gegenübergestellt.

Abbildung 8 - Gemeinsame Bedienungszeitverteilung für alle Schaltermgeschäfte



1) Diese Werte ergeben sich, wenn man unterstellt, daß das Geschäft "Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten" nur maschinell erledigt wird.

Für die Exponentialverteilung gilt, wie bereits bei der Beschreibung der Verteilung der Zwischenankunftszeiten dargelegt wurde, daß die Standardabweichung der Bedienungszeiten gleich der durchschnittlichen Bedienungszeit ist¹⁾.

Eine Beschreibung der empirischen Bedienungszeitverteilungen durch eine einzige Verteilung setzt jedoch voraus, daß durch die Organisation²⁾ der Schalter und die Art der Schlangendisziplin keine Unterschiede in der Behandlung der Schaltergeschäfte und der Kunden gemacht werden. Nur, wenn das der Fall ist, können Unterschiede zwischen den einzelnen Verteilungen ignoriert werden³⁾.

Deswegen kann die Möglichkeit einer Beschreibung der empirischen Bedienungszeitverteilungen durch eine theoretische Verteilung nicht untersucht werden, bevor

1) Vgl. Formel 4, S. 22.

Wesentlicher als die Verteilungsfunktion ist für die Möglichkeit einer Beschreibung der empirischen durch eine theoretische Verteilung die Varianz. Das zeigt die POLLACZEK-KHINTCHINE-Formel (siehe SAATY, Th. L.: Elements of Queueing Theory. a.a.O. S. 42): Für ein Warteschlangen-Modell mit exponentiell verteilten Zwischenankunftszeiten hängt für den Fall einer Bedienungsstation die durchschnittliche Wartezeit bis zum Bedienungsbeginn für gegebenes λ und μ nur von der Varianz der Bedienungszeiten ab:

$$E(T) = \frac{(\lambda/\mu)^2 + \lambda^2 V(T_b)}{2\lambda(1 - \lambda/\mu)}$$

Es ist zu vermuten, daß der Zusammenhang für mehrere Bedienungsstationen ähnlich ist. Vgl. hierzu LEE, A.M.: Applied Queueing Theory. a.a.O. S. 118f.

2) Unter Schalterorganisation ist die Art der Verteilung der Schaltergeschäfte auf die Schalter zu verstehen.

3) Vgl. COX, D. R., W. L. SMITH: Queues. a.a.O. S. 22f.

die Schalterorganisation und die Schlangendisziplin des vorliegenden Systems analysiert bzw. Annahmen über diese gemacht worden sind¹⁾.

3. Schalterorganisation und Schlangendisziplin

Im Erhebungszeitraum waren in der Schalterstelle in jedem 30-Minuten-Intervall mindestens 3 und höchstens 8 Schalter geöffnet (siehe Tabelle 4, S. 32)²⁾.

Die vorgefundene Schalterorganisation für 3 bis 8 geöffnete Schalter ist in Abbildung 9 (S. 34) dargestellt.

Diese Abbildung enthält auch eine entsprechende Schalterorganisation für 1, 2 und 9 geöffnete Schalter³⁾.

In der dargestellten Schalterorganisations-Matrix bedeuten weiße Felder, daß bestimmte Schalter für bestimmte Schaltergeschäfte verfügbar sind, und schwarze Felder, daß bestimmte Schaltergeschäfte an bestimmten Schaltern nicht erledigt werden. Abbildung 9 zeigt, daß nur Schaltergeschäft 3 an allen Schaltern bearbeitet wird. Alle anderen Geschäfte werden entweder an einigen oder auch nur an einem Schalter erledigt. Es ist außerdem zu sehen, daß jeder Schalter für eine unterschiedliche Zahl und Art von Schaltergeschäften zur Verfügung steht.

1) Erweist sich eine Monte Carlo - Simulation des Wartesystems als erforderlich, kann es zweckmäßiger sein, auf eine Approximation der empirischen Verteilung durch eine theoretische zu verzichten und von den empirischen Verteilungen auszugehen.

2) Diese Schalteröffnungszeiten sind nicht die dem Dienstplan entsprechenden. Es handelt sich vielmehr um tatsächliche, aus den Erhebungsformularen entnommene, also um um Pausenzeiten verminderte Dienstplan-Schalteröffnungszeiten.

3) Die Schalterorganisation war im Erhebungszeitraum für gleiche Schalteröffnungszahlen verschieden. Abbildung 9 gibt die am häufigsten beobachtete Organisation wieder.

Tabelle 4 - Schalteröffnungszahlen im Erhebungszeit-
raum

Wochentag Zeit- intervall	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
8 ⁰⁰ - 8 ³⁰	4	4	4	3	4	4
8 ³⁰ - 9 ⁰⁰	4	4	5	4	4	5
9 ⁰⁰ - 9 ³⁰	6	5	7	5	5	6
9 ³⁰ - 10 ⁰⁰	6	6	6	6	4	6
10 ⁰⁰ - 10 ³⁰	8	6	7	7	5	7
10 ³⁰ - 11 ⁰⁰	6	5	7	6	6	7
11 ⁰⁰ - 11 ³⁰	7	6	7	5	6	7
11 ³⁰ - 12 ⁰⁰	7	6	8	6	7	8
12 ⁰⁰ - 12 ³⁰	6	5	6	5	5	8
12 ³⁰ - 13 ⁰⁰	5	5	6	6	5	6
13 ⁰⁰ - 13 ³⁰	5	4	6	4	5	4
13 ³⁰ - 14 ⁰⁰	5	5	5	5	4	
14 ⁰⁰ - 14 ³⁰	5	4	4	4	4	
14 ³⁰ - 15 ⁰⁰	5	5	4	4	5	
15 ⁰⁰ - 15 ³⁰	7	7	5	5	5	
15 ³⁰ - 16 ⁰⁰	6	6	6	5	5	
16 ⁰⁰ - 16 ³⁰	8	6	6	6	5	
16 ³⁰ - 17 ⁰⁰	7	6	6	6	6	
17 ⁰⁰ - 17 ³⁰	7	6	7	7	6	
17 ³⁰ - 18 ⁰⁰	8	7	6	7	6	

Es handelt sich also um ein mehr oder minder spezialisiertes Schaltersystem, (System mit limited availability), das sich nicht in einem Modell mit identischen parallelen Schaltern fixieren läßt. Ebenso ist es nicht möglich, das System in mehrere Untersysteme mit zwei oder mehr identischen parallelen Schaltern aufzuteilen.

Die Frage, ob sich das System in voneinander unabhängige - und damit isoliert analysierbare - Ein-Schalter-Systeme trennen läßt, kann nur unter Berücksichtigung der Schlangendisziplin entschieden werden. "It is clear that if some rule can be established to determine which queue a customer will join, and if once in a particular queue a customer must remain there, then the so-called multiple-channel system is nothing more than several non-cooperating single-channels"¹⁾.

Die Situation in den Schalterstellen der deutschen Postämter läßt dem Kunden jedoch die Möglichkeit, mit dem Ziel, seine Wartezeit zu reduzieren, von einer Wartelinie in eine andere überzuwechseln. Dieses Phänomen wird in der Literatur als "jockeying" bezeichnet.

Die möglichen Strategien, die einem Kunden offenstehen können, der in einem Mehr-Schalter-System bedient werden will, sind nach einer Klassifikation bei KOENIGSBERG prinzipiell folgende²⁾:

1. Das "Maitre d'Hôtel - Prinzip": Dies ist die gewöhnlich in der Warteschlangentheorie angenommene Regel. Der Kunde wartet in einer einzigen Wartelinie

1) LEE, A. M.: Applied Queueing Theory. a.a.O. S. 55.

2) KOENIGSBERG, E.: On Jockeying in Queues. a.a.O. KOENIGSBERG erläutert die folgenden Prinzipien für den Zwei-Schalter-Fall. Es werden noch zwei weitere, hier nicht wiedergegebene Prinzipien aufgeführt.

für alle Schalter und bewegt sich in der Schlange einer FIFO-Regel¹⁾ entsprechend vorwärts. Wenn mehr als ein Schalter frei ist, wählt er jeden der freien Schalter mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

2. Das "KRISHNAMOORTHY-Prinzip": KRISHNAMOORTHY²⁾ hat ein Zwei-Schalter-System untersucht, in dem die Kunden an dem einen Schalter schneller abgefertigt werden können als an dem anderen. Für die Strategie der Kunden hat er zwei Fälle unterschieden:

a. Wenn kein Schalter frei ist, gilt das "Maître d'Hôtel-Prinzip". Wenn ein Schalter frei ist, wählt der Kunde diesen. Wenn beide Schalter frei sind, wählt er den Schalter, an dem er schneller bedient werden kann.

b. Wenn beide Schalter frei sind, wählt ein eintreffender Kunde ebenfalls den "schnelleren Schalter". Wenn dieser besetzt ist, wartet er dennoch, gleichgültig, ob der andere Schalter besetzt ist oder nicht, solange vor dem "schnelleren Schalter", wie er erwarten kann, daß seine Wartezeit einschließlich seiner Bedienungszeit an diesem geringer ist als an dem anderen Schalter.

3. "Tellers' windows": Vor jedem Schalter existiert eine eigene Wartelinie. Ein ankommender Kunde schließt sich der kürzeren an. Sind mehrere frei, schließt er sich jeder der freien mit gleicher Wahrscheinlichkeit an. Hat er sich einmal einer bestimmten Schlange angeschlossen, verläßt er sie nicht mehr.

1) FIFO = first in, first out. Diese Bezeichnung entspricht dem Zusammenhang nicht genau. Es ist gemeint, daß der Kunde, der zuerst eingetroffen ist, zuerst bedient wird. Das muß nicht bedeuten, daß seine Bedienung auch zuerst abgeschlossen wird. Vgl. KRISHNAMOORTHY, B.: On the Concept of FIFOV in Queues. In: Operations Research 13 (1965). S. 365 - 374.

2) KRISHNAMOORTHY, B.: On a Poisson Queue with two Heterogeneous Servers. a.a.O.

4. "Tellers' windows with jockeying": Die Kunden wechseln zur jeweils kürzesten Schlange über.

a. Das Überwechseln erfolgt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Die Kunden wechseln von einer längeren zu einer kürzeren Wartelinie entsprechend einer Rate über, die der Differenz zwischen den Wartelinien proportional ist.

b. Ein Kunde wechselt sofort über, wenn die Differenz zwischen seiner und einer anderen Wartelinie einen Kunden überschreitet.

Solange der Fall möglich ist, daß Kunden im System warten, obwohl sie an einer Bedienungsstation bedient werden könnten, ist ein System, in dem jockeying erlaubt ist, einem System, das nach dem "Maitre d'Hôtel - Prinzip" arbeitet, unterlegen. "When we consider the effects of jockeying, we recognize that it can only improve system performance if it increases the utilization of the servers. If it does not, jockeying is merely a game played by people in the waiting room to amuse themselves. The only significant jockeying is that which prevents the server from being idle"¹⁾.

Bei dem Versuch, das Schlangenverhalten in der untersuchten Schalterstelle der Klassifikation nach KOENIGSBERG entsprechend einzuordnen, müssen die Kunden nach ihren Schaltergeschäften unterschieden werden. Es ergeben sich folgende Gruppen:

1. Kunden, denen nur ein Schalter zur Bedienung zur Verfügung steht (bei z. B. 6 geöffneten Schaltern Schaltergeschäfte 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19).

Für diese besteht natürlich überhaupt keine Möglichkeit,

1) KOENIGSBERG, E.: On Jockeying in Queues. a.a.O. S. 426.

durch anfängliches Anstellen an der kürzesten Schlange (Prinzip 3) oder durch späteres jockeying (Prinzip 4) ihre Wartezeit zu reduzieren. Die Wahrscheinlichkeit des Überwechselns von einer Schlange zu einer anderen ist gleich null.

2. Kunden, denen mehrere Schalter zur Bedienung zur Verfügung stehen (bei z.B. 6 geöffneten Schaltern Schaltergeschäfte 1, 3, 4, 5, 6, 14).

Für diese gilt, daß die Möglichkeit, durch jockeying¹⁾ die Wartezeit zu reduzieren, um so größer ist, je mehr Schalter für die Bedienung in Frage kommen. Bei vielen geöffneten Schaltern ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kunde die jeweils kürzeste Wartelinie herausfindet und zu ihr überwechselt, allerdings geringer als bei wenigen geöffneten Schaltern, da es für den Kunden schwieriger ist, sich Information über weiter entfernte Wartelinien zu verschaffen, sei es über ihre Länge, sei es darüber, ob die Wartelinie überhaupt zu einem Schalter führt, an dem sein Schaltergeschäft erledigt wird.

Die Wahrscheinlichkeit des Überwechselns konnte aus den erhobenen Daten nicht ermittelt werden. Sie ist vermutlich etwas geringer als eins. Wenn man annimmt, daß die Kunden sich so verhalten, daß kein Schalter frei steht, wenn es wartende Kunden gibt, die an einem freien Schalter bedient werden können, dann ist die Größe der Wahrscheinlichkeit des Überwechselns für den Fall, daß vor jedem Schalter eine Warteschlange existiert, für die entstehenden durchschnittlichen Warte-

1) Jockeying läßt sich auch aus den Erhebungsformularen (siehe Abbildung 1, S. 15) nachweisen. Durchgestrichene Ankunftszeiten bedeuten, daß ein Kunde zu einem anderen Schalter übergewechselt ist.

zeiten irrelevant¹⁾²⁾³⁾. Das Schlangenverhalten dieser Gruppe ist demnach Prinzip 4b gleichwertig.

3. Kunden mit dem Schaltergeschäft "Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten" (Schaltergeschäft 2 und 20). Sind weniger als 6 Schalter geöffnet, sind diese Kunden der Gruppe 1 zuzurechnen, da dann nur der Schalter mit Zahlkarten-Annahme-Maschine zu ihrer Bedienung zur Verfügung steht (vgl. Abbildung 9, S. 34).

Sind 6 und mehr Schalter geöffnet, können sie an einem weiteren Schalter von Hand bedient werden.

Wenn beide Schalter frei sind, bevorzugen diese Kunden den Maschinen-Schalter, da sie wissen, daß sie an diesem schneller bedient werden. Ebenso reihen sie sich, wenn sich vor beiden Schaltern Warteschlangen gebildet haben, selbst dann in die Schlange vor dem Maschinen-Schalter ein, wenn diese länger ist als die vor dem für Hand-Bedienung zur Verfügung stehenden Schalter.

Erst dann, wenn die Differenz zwischen den Warteschlangenlängen so groß ist, daß die Kunden damit rechnen, daß ihre Wartezeit einschließlich ihrer Bedienungszeit bei Hand-Bedienung kürzer sein wird, ziehen sie es vor, nicht an dem Maschinen-Schalter zu warten.

1) Die Wahrscheinlichkeit des Überwechsels könnte für diesen Fall auch gleich null sein.

2) Als Kriterium zur Beurteilung des Funktionierens des untersuchten Systems wird die durchschnittliche Wartezeit verwendet. Die Wahrscheinlichkeit des Überwechsels kann dagegen im Hinblick auf die entstehende Verteilung der Wartezeiten von Bedeutung sein.

3) Vgl. hierzu die Untersuchung über Probleme und Organisation des Schalterdienstes in Schweden: Kassatjänstens organisation, Förslag med allmänna riktlinjer för kassatjänstens organisation utarbetat inom generalpoststyrelsens organisationsavdelning i samarbete med Statistiska Forskningsgruppen vid Stockholms universitet. In: Postala Meddelanden, utgivna av Kungl. Generalpoststyrelsen, 32 (1962), Nr. 2. S. 62f.

Dieses Verhalten entspricht KRISHNAMOORTHY's Prinzip, Variante b.

Insgesamt läßt sich über das vorgefundene Schalter-system sagen, daß es sich wegen der teilweisen Spezialisierung der Schalter und der sich daraus ergebenden Schlangendisziplin weder in einem Modell mit mehreren identischen kooperierenden Schaltern noch in einem Modell mit mehreren voneinander unabhängig operierenden Schaltern fixieren läßt. Eine analytische Behandlung des Systems ist damit praktisch nicht möglich. Ebenso lassen die Unterschiede in der Behandlung der Schaltergeschäfte bzw. der Kunden nicht die Möglichkeit zu, die empirischen Bedienungszeitverteilungen durch eine einzige Verteilung für alle Schaltergeschäfte zu beschreiben¹⁾.

4. Mögliche Bestimmungsgründe für die mittleren Bedienungszeiten

Es wurde nicht untersucht, ob die Dauer der Bedienungszeiten von der Zahl der pro 30 min pro Schalter eintreffenden Kunden abhängt, sondern von vornherein angenommen, daß ein solcher Zusammenhang nicht besteht. Diese Annahme lag nahe, da die Zahl der pro Schalter pro halbe Stunde abzufertigenden Kunden, wie ein Vergleich von Tabelle 1 (S. 19) und Tabelle 4 (S. 32) ergibt, nicht wesentlich schwankte.

1) Vgl. S. 30f.

Betrachtet man den Zusammenhang zwischen dem Ausmaß der Spezialisierung der Schalter bzw. der Schalterbeamten auf bestimmte Schaltergeschäfte und der Bedienungsdauer, so ist grundsätzlich zu vermuten, daß sich die durchschnittlichen Bedienungszeiten durch Ausweitung der Spezialisierung reduzieren ließen.

Da bis auf den Schalter, der für maschinelle Annahme von Zahlkarten und Postanweisungen (Schaltergeschäft 2) zuständig war, an allen Schaltern ungefähr gleich viele Schaltergeschäfte bearbeitet wurden (siehe Abbildung 9, S. 34), konnte nicht ermittelt werden, ob ein Zusammenhang zwischen mittlerer Bedienungszeit und Spezialisierungsgrad besteht.

Der Schalter, der auf maschinelle Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten spezialisiert war (nebenbei wurden auch Auskünfte erteilt und Geld gewechselt), hatte keinen vergleichbaren Schalter. An den anderen Schaltern wurde bereits ein so großer Anteil an den häufig vorkommenden Schaltergeschäften bearbeitet, daß vermutet werden darf, daß im entgegengesetzten Fall, also bei zunehmender Entspezialisierung der Schalter, keine Erhöhung der durchschnittlichen Bedienungszeiten eintreten würde¹⁾.

Ein Zusammenhang zwischen der Tageszeit und der mittleren Bedienungszeit ist wegen der Schwankungen in der Zusammensetzung der Schaltergeschäfte im Tagesablauf denkbar, wurde aber nicht näher untersucht. Für die

1) Diese Vermutung wird durch eine persönliche Mitteilung aus dem Posttechnischen Zentralamt in Darmstadt vom Mai 1968 bestätigt. Nach dieser Mitteilung haben Experimente mit einer weitgehenden Allzweckorganisation der Schalter in einem Postamt in Düren nach ersten Beobachtungen gezeigt, daß mit keiner durch Allzweckorganisation hervorgerufenen Erhöhung der Bedienungszeiten gerechnet werden muß.

weiteren Überlegungen wurde angenommen, daß die Zusammensetzung der Schaltergeschäfte pro 30 Minuten den beobachteten Anteilen der Schaltergeschäfte im Untersuchungszeitraum entspricht.

III. Modifizierungsmöglichkeiten des untersuchten Systems

Ziel der Untersuchung eines Wartesystems ist es, die Wirkungsweise des Systems zu verbessern. Als Kriterium zur Beurteilung der Güte des Funktionierens des untersuchten Systems wird die durchschnittliche Wartezeit der Kunden bei einer bestimmten Zahl geöffneter Schalter verwendet. Die Zahl der im System wartenden Kunden läßt sich aus der durchschnittlichen Wartezeit leicht als Produkt aus Ankunftsrate λ und der durchschnittlichen Wartezeit ermitteln (vgl. S. 13). Sie ist als Effizienzkriterium uninteressant, da in der Schalterstelle ausreichender Warteraum zur Verfügung stand.

Ansatzpunkte für eine effizientere Gestaltung liegen im vorliegenden Wartesystem praktisch nur bei dem Bedienungsvorgang. Dieser kann auf drei Wegen modifiziert werden:

1. durch Änderung der Verteilung der Schaltergeschäfte auf die Schalter, d.h. durch eine Änderung der Schalterorganisation und eine damit verbundene Änderung der Warteschlangendisziplin.

Hierbei ist zu untersuchen, ob und um wieviel bei gleicher Zahl geöffneter Schalter, bei gleichen durchschnittlichen Bedienungszeiten und bei gleicher Verkehrsichte die durchschnittliche Wartezeit der Postkunden reduziert werden kann.

Nun ist die Zahl der Möglichkeiten, 20 Schaltergeschäfte mehreren Schaltern zuzuordnen, so groß, daß eine Betrachtung aller Möglichkeiten von vornherein ausgeschlossen ist.

Aufgrund folgender Überlegungen bietet sich jedoch ein Vergleich der vorgefundenen Schalterorganisation mit einer Organisation an, bei der, soweit es die technische Ausrüstung der Schalter mit Maschinen erlaubt, jedes Schaltergeschäft an jedem Schalter erledigt wird, also ein Vergleich mit einem modifizierten Allzwecksystem¹⁾:

Bedingt durch die teilweise Spezialisierung der Schalter und die damit verbundene Schlangendisziplin im bestehenden System wird häufig der Fall eintreten, daß Schalter leerstehen, obwohl sich vor anderen Schaltern Warteschlangen gebildet haben. Dies wird insbesondere dann häufig vorkommen, wenn der Anteil der verschiedenen Schaltergeschäfte im Zeitablauf stark schwankt und die Verfügbarkeit der Schalter diesen Schwankungen wie im untersuchten System nicht angepaßt wird oder werden kann.

Werden dagegen alle Schalter für alle Schaltergeschäfte verfügbar gemacht, dann wird die unnötige Leerzeit der Schalterbeamten reduziert. Unnötige Leerzeit kann dann sogar ganz vermieden werden, wenn die Kunden sich so verhalten, daß kein Schalter frei steht, wenn es wartende Kunden gibt, die an einem freien Schalter bedient werden können. Dieses Verhalten ist dem durch teilweise Spezialisierung der Schalter erzwungenem Warteschlangenverhalten gegenüber günstiger, da eine

1) Sie erlaubt es nicht für die Schaltergeschäfte "Vermittlung von Gesprächen" und "maschinelle Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten".

Reduzierung der Leerzeiten der Schalterbeamten natürlich auch eine Reduzierung der durchschnittlichen Wartezeiten der Kunden bewirkt¹⁾.

Ein Vergleich mit einem Allzwecksystem erscheint außerdem schon deshalb zweckmäßig, weil es Schalter und Schalterbeamte austauschbar macht und daher die Schließung und Eröffnung von Schaltern entsprechend der Verkehrsdichte vereinfacht.

Der Bedienungsvorgang kann weiterhin modifiziert werden

2. durch Automatisierung des Bedienungsvorgangs und damit Reduzierung von Mittelwert und Varianz der Bedienungszeiten. Hierbei bietet sich wegen des hohen Anteils des Geschäftes "Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten" (18,94 %) eine Untersuchung des Effektes der Installation von Zahlkartenannahme-Maschinen auf die durchschnittliche Wartezeit aller Kunden an.

3. durch Änderung der Zahl der geöffneten Schalter, d.h. durch Optimierung der Schalteröffnungszeiten.

1) Vgl. zur Überlegenheit der Allzweckorganisation auch die Ergebnisse der Untersuchung über Probleme und Organisation des Schalterdienstes in Schweden: Kassatjänstens organisation... a.a.O. Es wurde untersucht, ob es vorteilhaft ist, wenn man den Kundenstrom zu mehreren Geldschaltern aufteilt und an Spezialschaltern bedienen läßt. Die Kunden wollten in der Hauptsache drei Schaltergeschäfte erledigen: 1. Postgiro-Einzahlung oder -Auszahlung 2. Einzahlungen von Postanweisungen 3. Postspargbankgeschäfte. Die erste Kundenart hatte einen Anteil von $\frac{2}{3}$ an allen Kundenarten und eine geringere durchschnittliche Bedienungszeit. Modellmäßig wurde für sie ein Spezialschalter zur Verfügung gestellt. Außerdem wurde sie auch an den übrigen Schaltern bedient. Die durch Simulation auf einer elektronischen Rechenanlage erzielten Ergebnisse ergaben, daß die Spezialisierung sowohl für die Postgiro-Kunden als auch für die übrigen Kunden höhere Wartezeiten bewirkt.

D. Modellbildung für das untersuchte Wartesystem =====

Ein Modell ist eine "Darstellung eines Systems, die sich dazu eignet, die Wirkung möglicher Veränderungen innerhalb des Systems auf die Gesamtwirksamkeit desselben vorherzusagen"¹⁾. Je stärker der Abstrahierungsgrad des Modells ist, desto leichter wird es in der Regel sein, das Modell zu lösen, desto weniger wirklichkeitsnah wird aber diese Lösung sein. Umgekehrt wird die Modelllösung umso besser sein, je genauer die Strukturen des Systems in dem Modell fixiert worden sind.

Ziel ist es, das System in einem Modell nicht möglichst genau, sondern genau genug wiederzugeben, um brauchbare Schlüsse aus dem Modell ziehen zu können.

Unterschiedlichen Zwecken entsprechend werden zwei Gruppen von Modellen für das zu untersuchende Schalter-system gebildet. Die erste behandelt Modelle, in denen die Schalter ohne Einschränkung für alle Schaltermgeschäfte verfügbar und identisch sind und das Warteschlangenverhalten dem "Maitre d'Hôtel - Prinzip" entspricht. In der zweiten Gruppe von Modellen ist die Verfügbarkeit der Schalter in irgendeiner Form beschränkt; die Schalter sind nicht identisch und die Warteschlangendisziplin weicht von dem "Maitre d'Hôtel - Prinzip" ab.

1) CHURCHMAN, C. W., R. L. ACKOFF und E. L. ARNOFF: Operations Research. Eine Einführung in die Unternehmensforschung. Wien-München 1961. S. 149.

I. Erste Modell-Gruppe: Wartesysteme mit identischen parallelen Schaltern

1. Modell für exponentiell verteilte Bedienungszeiten

Es werden folgende Annahmen gemacht:

a. für die Ankunft der Kunden

- (1) Die Menge der potentiellen Kunden ist unendlich.
- (2) Die Kundenankünfte sind unabhängig von der Schlangenlänge. Es gibt keine Kunden, die das System vor Abschluß ihrer Bedienung verlassen.
- (3) Die Kundenankünfte sind poissonverteilt; entsprechend sind die Zwischenankunftszeiten exponentiell verteilt.
- (4) Die Kundenankünfte sind zeitunabhängig, d.h., der Erwartungswert für die Zufallsvariable Zwischenankunftszeit und die Varianz der Zwischenankunftszeiten sind im Zeitablauf konstant.
- (5) Es gibt nur eine Kundenart.

b. für die Bedienung der Kunden

- (1) Die Bedienungszeiten sind exponentiell verteilt. Der Mittelwert der Bedienungszeiten ist entweder gleich dem, der empirisch beobachtet worden wäre, wenn jeder Schalter mit einer Zahlkartenannahme-Maschine ausgerüstet gewesen wäre, oder gleich dem Mittelwert, der beobachtet worden wäre, wenn das Geschäft "Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten" nur manuell bearbeitet worden wäre.
- (2) Die Bedienungszeiten sind weder von der Zeit noch von der Schlangenlänge abhängig.
- (3) Es gibt mehrere identische parallele Schalter. Erwartungswert und Varianz der Bedienungszeiten sind an jedem Schalter gleich groß.

c. für die Schlangendisziplin

Vor jedem Schalter bildet sich eine eigene Wartelinie. Die Kunden wechseln jedoch spätestens dann ihre jeweilige Wartelinie sofort, wenn ein anderer Schalter frei wird. Dieses Verhalten ist hinsichtlich der entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten einem Verhalten nach dem "Maitre d'Hôtel - Prinzip" gleichwertig.

Dieses erste Modell ist demnach so konstruiert, daß es einer einfachen analytischen Lösung zugänglich ist.

2. Modell für empirisch verteilte Bedienungszeiten

Die Prämissen dieses Modells sind denen des ersten bis auf Annahme a.(5) und b.(1) gleich. Es gibt abweichend von a.(5) 19 Kundenarten, deren Bedienungszeiten sich wie empirisch beobachtet verteilen. Da jeder Kunde an jedem Schalter bedient werden kann, ist dieses Modell einem Modell gleichwertig, in dem nur ein Schaltergeschäft angenommen wird, für das sich die Bedienungszeiten nach der in Abbildung 8, S.29 dargestellten gemeinsamen Bedienungszeitverteilung für die Schaltergeschäfte verteilen.

Für dieses Modell ist eine analytische Lösung nicht durchführbar. Es wird ebenso wie die folgenden durch Anwendung von Simulationsverfahren gelöst.

3. Modell für hyperexponentiell verteilte Bedienungszeiten

Die Prämissen dieses Modells unterscheiden sich von denen für Modell I.2. nur dadurch, daß für jedes der 19 Schaltergeschäfte eine exponentielle Verteilung

für die Bedienungszeiten angenommen wird. Als gemeinsame Bedienungszeitverteilung für alle Schaltergeschäfte ergibt sich demnach eine hyperexponentielle Verteilung¹⁾.

Diese drei ersten Modelle dienen folgenden Zwecken:

1. Mit Hilfe des Modells I.1. soll die durchschnittliche Wartezeit für ein vollständiges Allzwecksystem ohne Zahlkartenannahme-Maschine für verschiedene Zahl besetzter Schalter und für verschiedene Zahl pro 30 min in der Schalterstelle eintreffender Kunden bestimmt werden.

2. Mit Hilfe des Modells I.2. soll für eine bestimmte Schalterzahl und eine bestimmte Verkehrsdichte die durchschnittliche Wartezeit der Kunden durch Anwendung von Simulationsverfahren bestimmt werden. Ein Vergleich dieser mit der mittleren Wartezeit für

1) Wenn l_m gleich der relativen Häufigkeit von Schaltergeschäft m ist und μ_m die Abfertigungsrate für Schaltergeschäft m ist, dann ergibt sich folgende, als hyperexponentielle Verteilung bekannte Verteilung für die Bedienungszeiten:

$$\sum_{m=1}^{19} l_m \mu_m e^{-\mu_m t}, \quad \sum_{m=1}^{19} l_m = 1.$$

Der Erwartungswert dieser Verteilung beträgt

$$E(T_b) = \sum_{m=1}^{19} \frac{l_m}{\mu_m}.$$

Die Varianz beträgt

$$V(T_b) = 2 \sum_{m=1}^{19} \frac{l_m}{\mu_m^2} - \left(\sum_{m=1}^{19} \frac{l_m}{\mu_m} \right)^2.$$

Modell I.1. für gleiche Schalterzahl und Verkehrsdichte soll ergeben, wie groß die Differenz zwischen den durchschnittlichen Wartezeiten ist, die aus der Annahme exponentiell verteilter an Stelle empirisch verteilter Bedienungszeiten folgt.

Als Faktor, mit dem die aus Modell I.1. ermittelten durchschnittlichen Wartezeiten für ein Allzwecksystem ohne Zahlkartenannahme-Maschine zu korrigieren sind, kann dann der Quotient aus durchschnittlicher Wartezeit für empirisch verteilte und für exponentiell verteilte Bedienungszeiten verwendet werden.

3. Da Modell I.1. analytisch lösbar ist, kann mit ihm das Computer-Programm für die Lösung der Simulationsprogramme überprüft werden. Dies soll geschehen, indem die durchschnittliche Wartezeit für Modell I.1. durch Monte Carlo - Simulation bestimmt wird und der Wert der so ermittelten durchschnittlichen Wartezeit mit dem durch analytische Lösung gefundenen Wert für die durchschnittliche Wartezeit verglichen wird.

4. Für die zweite Modell-Gruppe ist es erforderlich, für jedes der verschiedenen Schaltergeschäfte eine Bedienungszeitverteilung zugrunde zu legen, da in diesen Modellen die Schaltergeschäfte unterschiedlich behandelt werden. Für die Technik des Simulierens bzw. Programmierens wäre es vorteilhaft, wenn jede Bedienungszeitverteilung durch eine Exponentialverteilung beschrieben werden könnte. Da dies mit der Annahme einer hyperexponentiellen Verteilung für die gemeinsame Bedienungszeitverteilung identisch ist, soll geprüft werden, ob diese Annahme zu signifikant höheren durchschnittlichen Wartezeiten führt als die Annahme einer exponentiellen Verteilung bzw. der empirischen Verteilung.

Wenn das der Fall ist, soll für die Modelle der zweiten Gruppe von den empirisch beobachteten Verteilungen ausgegangen werden.

II. Zweite Modell-Gruppe: Wartesysteme mit nicht-identischen parallelen Schaltern

1. Modell für die Ist-Organisation der Schalter

Die Prämissen stimmen bis auf folgende Abweichungen mit denen des Modells I.2. bzw. I.3. überein:

- (1) Die Verteilung der Schaltergeschäfte auf die Schalter ist gleich der in Abbildung 9 (S. 34) dargestellten.
- (2) Für die Schlangendisziplin gilt abweichend von Modell I.1., bedingt durch die teilweise Spezialisierung der Schalter:
 - a. Alle Kunden, außer denen mit dem Schaltergeschäft "Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten" wechseln ihre jeweilige Wartelinie immer dann sofort, wenn ein anderer Schalter, der für ihr Geschäft zur Verfügung steht, frei wird.
 - b. Für die Kunden, für die Zahlkarten und Postanweisungen bearbeitet werden müssen, wird unterstellt, daß sie sich an dem Schalter anstellen bzw. zu dem Schalter überwechseln, den sie als ersten wieder verlassen können¹⁾. Es wird also angenommen, daß Zahlkarten-Kunden sich so verhalten, als ob sie

1) Wie Abbildung 9 (S. 34) zu entnehmen ist, gilt dieses nur für mehr als 5 geöffnete Schalter, da bei weniger als 6 geöffneten Schaltern nur der Schalter mit Zahlkartenannahme-Maschine zur Verfügung steht.

sowohl die Warte- und Bedienungszeiten der vor ihnen angekommenen Kunden als auch ihre eigenen Bedienungszeiten voraussehen könnten. Auf diese Weise wird im Modell erreicht, daß sie sich bevorzugt an dem Schalter mit Zahlkartenannahme-Maschine anstellen¹⁾. Es gilt KRISHNAMOORTHY's Prinzip, Variante b.

2. Modell für die Allzweckorganisation der Schalter

Es besteht folgende Änderung gegenüber Modell II.1.: Nur für die Schaltergeschäfte "Vermittlung von Telefongesprächen" (7) und "Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten" (2 bzw. 20) stehen nicht alle Schalter zur Verfügung. Das Schaltergeschäft "Zahlkartenannahme" wird wie in Modell II.1. nur an einem Schalter maschinell erledigt. Hinsichtlich der Zahl der für Hand-Bedienung zur Verfügung stehenden Schalter wird dieses Modell alternativ gelöst, um die günstigste Zahl der neben dem Maschinenschalter zur Verfügung zu stellenden Schalter zu ermitteln.

3. Modell zur Bestimmung des Effektes der Installation zusätzlicher Zahlkartenannahme-Maschinen

Es erfolgt gegenüber Modell II.2. folgende Abwandlung: Um den Effekt der Installation von mehr als einer Zahlkartenannahme-Maschine auf die durchschnittliche Wartezeit zu bestimmen, werden modellmäßig alternative

1) Damit verwirklichen diese Kunden die FIFO-Regel im eigentlichen Sinne des Wortes (vgl. Anmerkung 1, S. 35).

Mengen von Zahlkartenannahme-Maschinen installiert. Um die Zahl der Alternativen zu beschränken, wird nicht wie in Modell II.2. eine alternative Zahl von für die manuelle Bedienung zur Verfügung stehenden Schaltern angenommen, sondern davon ausgegangen, daß Hand-Bedienung jeweils an allen Schaltern außer den Maschinenschaltern vorgesehen ist.

E. Modellösungsverfahren

=====

I. Grundsätzliche Möglichkeiten zur Lösung von Warteschlangenmodellen¹⁾

Die im vorigen Abschnitt aufgestellten Modelle sollen es ermöglichen, die verschiedenen verfügbaren Strategien zur Gestaltung des Schalterverkehrs zu bewerten. Es handelt sich demnach um Dezisionsmodelle, durch deren Lösung entschieden werden soll, welches die günstigste Organisation der Schalter ist und wieviele Schalter bei vorgegebenen Zahlen eintreffender Kunden zu besetzen sind, um die Kosten der Abfertigung der Kunden zu minimieren. Welche Verfahren sich eignen, um die verschiedenen Modelle zu lösen, hängt von der Struktur der Modelle ab.

Die Voraussetzungen des Modells I.1. sind so einschränkend, daß die Ermittlung der durchschnittlichen Wartezeit mit den Methoden der analytischen Warteschlangentheorie erfolgen kann. Für die anderen Modelle ist eine mathematische Analyse wegen der Komplizierung, die sich aus der Spezialisierung der Schalter und der Art der Bedienungszeitverteilungen ergibt, praktisch nicht möglich.

Jedoch läßt sich die mittlere Wartezeit für diese Modelle mit Hilfe der Methode der Monte Carlo - Simulation berechnen. Diese Methode besteht "in der Simulation eines Experimentes, das den Zweck hat, irgendeine Wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaft

1) Vgl. hierzu auch LEE, A. M.: Applied Queueing Theory. a.a.O. S. 88 - 92.

einer Gesamtheit von Gegenständen oder Ereignissen durch die Anwendung der Zufallsstichprobe auf die Komponenten dieser Gegenstände oder Ereignisse zu bestimmen"1).

"Monte Carlo - Methoden eignen sich vorzüglich zur Analyse von stochastischen Prozessen, sofern diese nur in einem Modell theoretisch fixiert sind. Indem man sich auf eine möglichst lange Folge von Zufallszahlen stützt, kann man den Prozeß praktisch beliebig oft 'durchspielen' und seine stochastischen Eigenschaften statistisch ermitteln. So ist es möglich, auch dort (wenigstens numerische) Aussagen zu machen, wo eine mathematische Analyse wegen der Kompliziertheit des betrachteten Systems mit allzu großen Schwierigkeiten verbunden ist, also praktisch nicht möglich ist. Statistische Schlüsse treten deshalb auf, weil die 'ausgewürfelten' Serien der Prozeßabläufe als eine Zufallsstichprobe aus dem Universum aller möglichen (zeitlichen) Entwicklungen des Prozesses aufgefaßt werden können"2).

Die Anwendung der Monte Carlo - Methode ist zeitraubend und zwingt deshalb in der Regel zum Einsatz einer elektronischen Rechananlage. Zur Vermeidung der damit verbundenen Kosten sollte nach analytischen Näherungslösungen auch für die nicht direkt analytisch lösbaren Modelle gesucht werden.

Für das Modell für die Ist-Organisation der Schalter ist der Versuch gemacht worden, eine solche Näherungs-

1) CHURCHMAN, C. W., R. L. ACKOFF und E. L. ARNOFF: Operations Research... a.a.O. S. 167.

2) SCHNEEWEISS, H.: Monte-Carlo-Simulation eines einfachen Warteschlangenmodells. In: Ablauf- und Planungsforschung 2 (1961). S. 17.

lösung zu entwickeln. Ihre Güte kann durch Vergleich mit den durch Simulation gefundenen Ergebnissen überprüft werden.

II. Analytische Lösung

Für Modell I.1., also für exponentiell verteilte Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten und für einen oder mehrere identische parallele Schalter läßt sich

1. die durchschnittliche Wartezeit der Kunden bis zum Bedienungsbeginn nach folgenden Ausdrücken bestimmen¹⁾:

a. Zahl der besetzten Schalter $c = 1$

$$E(T) = \frac{\lambda / \mu}{\mu - \lambda} \quad (5)$$

b. Zahl der besetzten Schalter $c > 1$

$$E(T) = \frac{p_0}{\mu c (c!)(1 - \lambda / c \mu)^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c, \quad (6)$$

worin p_0 , die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle Schalter frei sind bzw. kein Kunde im System ist,

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^c}{c! (1 - \lambda / c \mu)}} \quad (7)$$

beträgt.

1) Zur Entwicklung der Lösung siehe u. a. SAATY, Th. L.: Elements of Queueing Theory. a.a.O. S. 38 - 40 und 110 - 117.

In diesen Ausdrücken ist λ die gesamte Kundenankunftsrate im System und μ die Bedienungsrate pro Schalter.

2. Die Wartezeiten derjenigen, die eine Wartezeit größer als null haben, verteilen sich für¹⁾

$$c \geq 1$$

exponentiell mit der Dichtefunktion

$$f(t) = (c\mu - \lambda) e^{-(c\mu - \lambda)t} , \quad (8)$$

dem Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(T_w) &= \int_0^{\infty} t (c\mu - \lambda) e^{-(c\mu - \lambda)t} dt \\ &= \frac{1}{c\mu - \lambda} \end{aligned} \quad (9)$$

und der Varianz

$$\begin{aligned} V(T_w) &= \int_0^{\infty} t^2 (c\mu - \lambda) e^{-(c\mu - \lambda)t} dt - \frac{1}{(c\mu - \lambda)^2} \\ &= \frac{1}{(c\mu - \lambda)^2} . \end{aligned} \quad (10)$$

1) Siehe hierzu insbesondere ROSENBERG, W. J., A. I. PROCHOROW: Einführung in die Bedienungstheorie. a.a.O. S. 131 - 133.

III. Analytische Näherungslösung

Bei gleicher Anzahl Kunden, die pro Schalter abgefertigt werden müssen, ist nach den Ausdrücken (6) und (7) die durchschnittliche Wartezeit umso geringer, je größer die Zahl geöffneter paralleler Schalter ist. Dies ist leicht einsichtig, wenn man nur die Wartezeit derjenigen, die eine Wartezeit größer als null haben, betrachtet. Für diese gilt für Modell I.1. folgender Zusammenhang (siehe Formel 9):

$$E(T_w) = \frac{1}{c\mu - \lambda} = \frac{1}{c\mu - c\lambda_1} = \frac{1}{c} \frac{1}{\mu - \lambda_1}, \quad (11)$$

worin λ_1 gleich der durchschnittlichen Ankunftsrate pro Schalter ist.

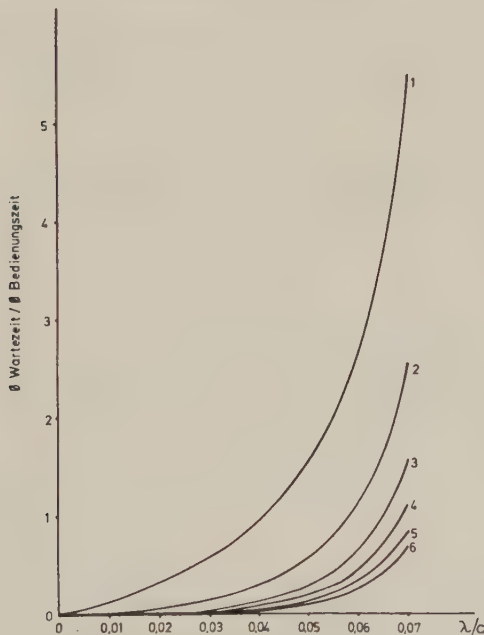
Die durchschnittliche Wartezeit bei 5 parallel geöffneten Schaltern ist nach dieser Formel z.B. 6/5 mal, bei 3 parallel geöffneten Schaltern 2 mal und bei einem geöffneten Schalter 6 mal so groß wie bei 6 geöffneten Schaltern.

Betrachtet man die durchschnittliche Wartezeit aller Kunden, so wird die durchschnittliche Wartezeit bei Eröffnung zusätzlicher Schalter bei gleicher Zahl von Kunden pro Schalter noch stärker reduziert (vgl. Abbildung 10, S. 57). Die Reduzierung ist relativ umso größer, je geringer die Verkehrsdichte ist. Das hängt damit zusammen, daß die Wahrscheinlichkeit zu warten nicht nur bei größerer Zahl geöffneter Schalter geringer ist, sondern außerdem auch bei Eröffnung weiterer Schalter bei geringer Verkehrsdichte relativ stärker abnimmt als bei hoher Verkehrsdichte.

Dem dargestellten Zusammenhang ist vergleichbar die Situation, in der bei einer bestimmten Zahl geöffneter

Schalter und bei einer bestimmten Zahl eintreffender Kunden Kunden mit einem bestimmten Schaltergeschäft nicht nur an einem Teil der Schalter, sondern an allen Schaltern bedient werden. Eine Ausweitung der Verfügbarkeit der Schalter kommt also in gewissem Sinne einer Erhöhung der Schalterzahl gleich¹⁾.

Abbildung 10 - Durchschnittliche Wartezeiten im Verhältnis zur durchschnittlichen Bedienungszeit für 1 bis 6 geöffnete Schalter bei gleicher Zahl pro Schalter eintreffender Kunden



1) Damit ist zugleich der Vorteil der Allzweckorganisation gegenüber der spezialisierten Organisation der Schalter ausgedrückt (vgl. S. 42f.).

Dieser Zusammenhang soll benutzt werden, um eine analytische Näherungslösung für ein teilweise spezialisiertes Schaltersystem zu entwickeln:

Es wird die den Kunden durchschnittlich zur Verfügung stehende Schalterzahl $\bar{c}$ berechnet. Für die in dem Postamt vorgefundene Schalterorganisation ergibt sich:

$$\bar{c} = \frac{\sum_{m=1}^{20} \frac{\lambda_m}{\mu_m} c_m}{c \sum_{m=1}^{20} \frac{\lambda_m}{\mu_m}} \quad \left(\sum_{m=1}^{20} \lambda_m = \lambda \right) \quad (12)$$

Hierin ist c_m gleich der Zahl der für die Erledigung des Schaltergeschäftes m zur Verfügung stehenden Schalter.

Das gesamte Schaltersystem wird jetzt als in $c/\bar{c}$ nicht kooperierende Allzwecksysteme mit $\bar{c}$ identischen parallelen Schaltern zerlegt betrachtet. Entsprechend treffen in dem Gesamtsystem die Kunden zwar mit einer Ankunftsrate von λ ein, in den isolierten Teilsystemen jedoch nur mit einer Ankunftsrate von $(\bar{c}/c)\lambda$. Die in den Teilsystemen entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten sind einander gleich. Deshalb genügt es, die durchschnittliche Wartezeit für ein Teilsystem zu bestimmen.

Dies möge an einem Beispiel noch einmal erläutert werden:

Wenn in einem Schaltersystem $c = 8$ Schalter besetzt sind, die Schalter aber so spezialisiert sind, daß den Kunden für ihre Schaltergeschäfte durchschnittlich nur $\bar{c} = 2$ Schalter zur Verfügung stehen, dann ist das System wie ein Schaltersystem zu behandeln, das aus $c/\bar{c} = 8/2 = 4$ unabhängig voneinander operierenden

Teilsystemen mit $\bar{c} = 2$ identischen parallelen Schaltern besteht.

Treffen die Kunden in dem Gesamtsystem mit einer Ankunftsrate von $\lambda = 0,04$ ein, so beträgt die Ankunftsrate für jedes Teilsystem $(\bar{c}/c)\lambda = 2/8 \cdot 0,04 = 0,01$. Die durchschnittliche Wartezeit wird also bei gegebener durchschnittlicher Bedienungszeit statt für $c = 8$ und $\lambda = 0,04$ für $c = 2$ und $\lambda = 0,01$ berechnet.

Da $\bar{c}$ in der Regel nicht ganzzahlig sein wird und da eine analytische Lösung für eine nicht ganzzahlige Schalterzahl nicht existiert, kann nur eine Näherungslösung durch Interpolation zwischen der Lösung für die nächst höhere ganzzahlige Schalterzahl $\bar{c}_0$ und der Lösung für die nächst niedrigere Schalterzahl $\bar{c}_u$ gefunden werden. Als Ankunftsrate müssen statt $(\bar{c}/c)\lambda$ entsprechend $(\bar{c}_0/c)\lambda$ und $(\bar{c}_u/c)\lambda$ verwendet werden.

Die so gefundene Lösung bildet eine Näherungslösung für exponentiell verteilte Bedienungszeiten¹⁾. Der

1) In diesem Zusammenhang sei auf eine von KOENIGSBERG, E.: Queueing with Special Service. In: Operations Research 4(1956). S. 213 - 220 vorgeschlagene Näherungslösung hingewiesen. KOENIGSBERG erörtert ein System, in dem von insgesamt a geöffneten Schaltern m "special service" anbieten. Für die Näherungslösungen wird unterstellt, daß die Bedienungszeiten für "normal" und für "special units" gleich und außerdem entweder exponentiell verteilt oder konstant sind. Er zeigt, daß das System sowohl für "normal" als auch für "special units" ungünstiger ist als ein entsprechendes Allzwecksystem.

Es werden zwei Approximationsverfahren wiedergegeben. Für beide wird davon ausgegangen, daß zwei Wartelinien existieren: die eine sowohl für "special" als auch für "normal units" vor den Schaltern, die "special service" anbieten, und die andere nur für "normal units" vor den übrigen Schaltern. Jockeying ist nicht gestattet.

Für die erste approximative Lösung wird davon ausgegangen, daß sich vor den m Schaltern mit "special

Quotient aus der nach Modell I.2. bestimmten durchschnittlichen Wartezeit für empirisch verteilte Bedienungszeiten und aus der nach Modell I.1. für gleiche Schalterzahl und Verkehrsdichte bestimmten durchschnittlichen Wartezeit für exponentiell verteilte Bedienungszeiten kann als Korrekturfaktor für die Näherungslösung verwendet werden¹⁾. Die Güte der so gefundenen Näherungslösung wird überprüft durch die durch Simulation gefundenen Ergebnisse für das Modell für die Ist-Organisation der Schalter (Modell II.1.).

service" neben den "special units" m/a vH der "normal units" anstellen. Die übrigen "normal units" schließen sich der Warteschlange vor den $a-m$ Schaltern mit "normal service" an. Diese erste Approximation liefert längere Warteschlangen, als vor den Schaltern mit "special service" in Wirklichkeit erwartet werden müßten.

Für die zweite approximative Lösung wird angenommen, daß sich vor den m Schaltern mit "special service" m/a vH der "units" insgesamt anstellen, vor den Schaltern mit "normal service" demgemäß $(a-m)/a$ vH der "units". Diese zweite Approximation liefert für "special units" kürzere Wartezeiten als tatsächlich entstehen würden.

1) Vgl. die Ausführungen auf S. 48.

IV. Lösung durch Simulation

1. Ermittlung der Zwischenankunftszeiten, der Bedienungszeiten und der Schaltergeschäfte über Zufallszahlen

a. Erzeugung von Pseudozufallszahlen

Die Methode der Monte Carlo - Simulation beruht auf Zufallszahlen.

Ergebnisse von Durchspielungen des Modellablaufs für verschiedene Kundenankunftsrate bei gleicher Zahl und/oder Organisation der Schalter bzw. für gleiche Kundenankunftsrate bei unterschiedlicher Zahl und/oder Organisation der Schalter sind bei Verwendung echter Zufallszahlen schlechter vergleichbar als bei Verwendung von Pseudozufallszahlen¹⁾.

Pseudozufallszahlen sind im Gegensatz zu echten Zufallszahlen nach deterministischen Regeln generiert und deshalb identisch wiederholbar. Dies hat den Vorteil, daß für jede Modellvariante die gleichen Schaltergeschäfte, die gleichen Bedienungszeiten und - bei gleicher Kundenankunftsrate - auch die gleichen Zwischenankunftszeiten durchgespielt werden können.

Die Verwendung von Pseudozufallszahlen ist immer dann vorteilhaft, wenn mehrere Stichprobenergebnisse aus dem gleichen Zufallsprozeß in Abhängigkeit von veränderten Prozeßparametern verglichen werden sollen²⁾³⁾.

1) Vgl. LEE, A. M.: Applied Queueing Theory. a.a.O. S. 72.

2) Vgl. KOXHOLT, R.: Die Simulation - ein Hilfsmittel der Unternehmensforschung. München-Wien 1967. S. 41.

3) Ähnlich wird der Physiker bestrebt sein, bei einem Vergleich zweier physikalischer Modelle im Laboratorium möglichst identische Umweltsbedingungen zu schaffen. Vgl. WEINBERG, F.: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie Anwendungen im Operations Research. Berlin-Heidelberg-New York 1968. S. 267f.

Die wegen dieses Vorteils für die Durchführung der Simulation verwendete Pseudozufallszahlenfolge wird folgendermaßen bestimmt¹⁾:

Eine große Zahl (hier 99909) wird mit einer zwischen 0 und 1 gelegenen Variablen z_1 multipliziert. Von dem entstehenden Produkt werden die Nachkommastellen als Zufallszahlen verwendet und als neuer Wert z_{i+1} festgehalten. Die Folge $z_1, z_2, z_3, \dots$ verbleibt somit im Bereiche zwischen 0 und 1. Als Anfangswert muß eine Zahl z_0 gewählt werden, die ebenfalls zwischen 0 und 1 liegt. Hierfür eignet sich jede Zahl, die in der letzten Nachkommastelle eine der Ziffern 1,3,7 oder 9 aufweist. Für z_0 wurde eine entsprechende Zahl mit 10 Nachkommastellen gewählt.

Bei diesem Verfahren können bis zu $5 \cdot 10^8$ Zufallszahlen erzeugt werden; erst dann wiederholt sich die Folge.

b. Ermittlung der Zwischenankunftszeiten

Mit Hilfe der zwischen 0 und 1 gleichverteilten Zufallszahlen z_1 ist es möglich, Zufallszahlen x_1 zu gewinnen, die unabhängige Realisierungen einer Zufallsgröße X mit beliebiger Verteilungsfunktion ergeben²⁾ (vgl. Abbildungen 11 und 12).

Die Zufallsgröße Zwischenankunftszeit (T_a) besitzt den Modellannahmen gemäß eine Exponentialverteilung (siehe Formel 1, S. 22):

1) nach einem Verfahren, enthalten in der Statistischen Programmsammlung für die Olivetti Programma 101.

2) Vgl. hierzu u.a.: Simulationsmodelle für ökonomisch-organisatorische Probleme. Schriftenreihe Datenverarbeitung. Institut für Datenverarbeitung Dresden (Hrsg.), Köln-Opladen 1961. S. 208 - 214.

$$z = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0) \quad (13)$$

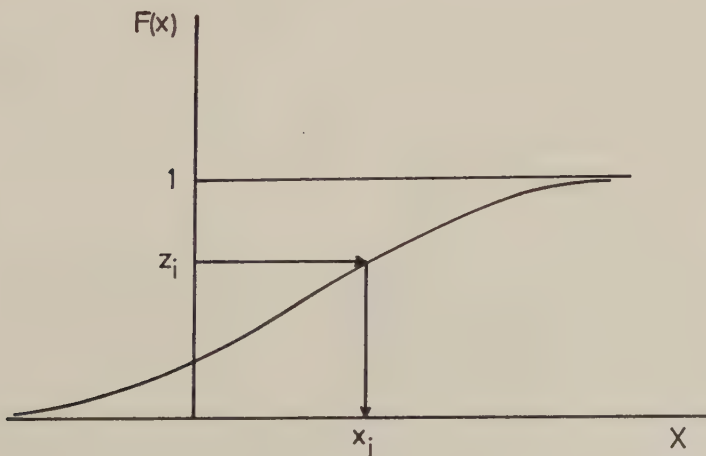
Als Umkehrfunktion erhält man für $t > 0$

$$F^{-1}(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z) \quad . \quad (14)$$

Da die Zufallsgröße Z zwischen 0 und 1 gleichverteilt ist, ist auch die Zufallsgröße $1 - Z$ zwischen 0 und 1 gleichverteilt. Somit ergibt sich für die Zufallsfolge der Zwischenankunftszeiten

$$t_{a_i} = -\frac{1}{\lambda} \ln z_i \quad . \quad (15)$$

Abbildung 11 - Realisierung einer stetigen Zufallsgröße



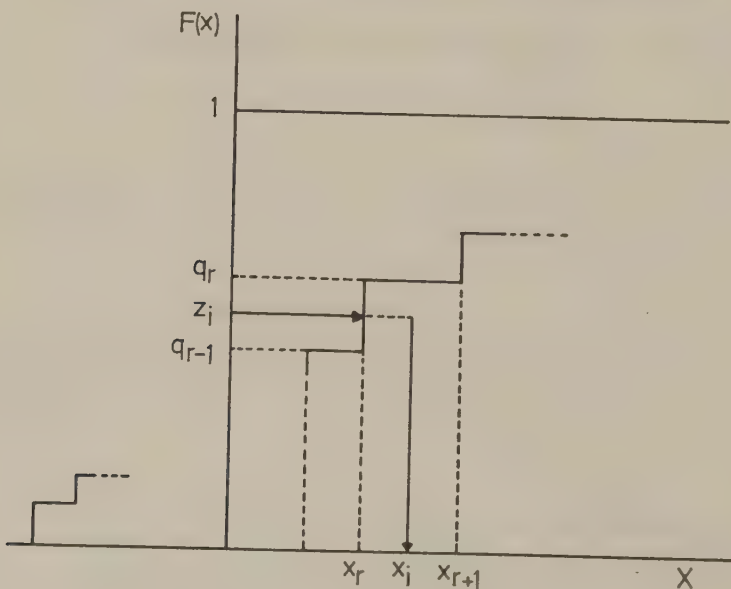
c. Ermittlung der Bedienungszeiten

Die Bedienungszeiten sind gemäß den Modellannahmen entweder exponentiell oder empirisch verteilt.

Eine Zufallsfolge exponentiell verteilter Bedienungszeiten wird wie die Zufallsfolge der Zwischenankunftszeiten ermittelt.

Für die Ermittlung einer Zufallsfolge von Bedienungszeiten aus der empirischen Bedienungszeitverteilung wird so vorgegangen, daß eine zufällige Bedienungszeit t_{b_i} gleich der Mitte des Intervalls $[t_{b_r}, t_{b_{r+1}}]$ gesetzt wird, wenn die Zufallszahl z_i in dem Intervall $[q_{r-1}, q_r]$ liegt (vgl. Abbildung 12).

Abbildung 12 - Realisierung einer Zufallsgröße mit einer empirischen Verteilungsfunktion



d. Ermittlung des Schaltergeschäftes

Es handelt sich um das Schaltergeschäft m , wenn die Zufallszahl z_i der Ungleichung

$$\sum_{j=0}^{m-1} 1_j < z_i \leq \sum_{j=0}^m 1_j \quad (1_0 = 0 ; \sum_{j=0}^M 1_j = .1) \quad (16)$$

genügt, wobei M gleich der Maximalzahl der Schaltergeschäfte ist.

2. Ermittlung der durchschnittlichen Wartezeit

Aus den zufällig erzeugten Zwischenankunftszeiten, Bedienungszeiten und Schaltergeschäften kann nun durch modellgemäße Kombination der Warteprozeß für die aufeinanderfolgenden Kunden wie folgt nachgebildet werden¹⁾: Bei der Ankunft des $(i+1)$ ten Kunden sind zwei Fälle möglich. Entweder ist ein Schalter frei und der Kunde kann sofort bedient werden ($t_{i+1} = 0$) oder sämtliche Schalter sind besetzt. Wenn der Kunde sich dann an dem Schalter anstellt, an dem er am kürzesten warten muß²⁾, ergibt sich seine Wartezeit aus der Summe aus Warte- und Bedienungszeit des vor ihm angekommenen Kunden abzüglich der Zeit t_{a_i} , die zwischen der Ankunft des

1) Die nachfolgende Nachbildung des Warteprozesses bezieht sich auf die Modellgruppe I. Die entsprechende Nachbildung des Warteprozesses für Modell-Gruppe II wird bei der Darstellung des Programmablaufplanes für eine elektronische Rechenanlage erklärt.

2) Wie bereits festgestellt wurde, ist es zwar nicht für die Verteilung der Wartezeiten, jedoch für die mittlere Wartezeit gleichgültig, ob der Kunde sich an dem Schalter anstellt bzw. zu dem Schalter überwechselt, an dem er am kürzesten warten muß, wenn die Kunden sich nur so verhalten, daß kein für die Bedienung zur Verfügung stehender Schalter frei steht.

iten und des $(i+1)$ ten Kunden verstrichen ist, während der letzterer nicht zu warten braucht¹⁾:

$$t_{i+1} = \max \{ t_i + t_{b_i} - t_{a_i}, 0 \} \quad (17)$$

Sind die Wartezeiten von n aufeinanderfolgenden Kunden ermittelt, dann wird als Schätzwert für die mittlere Wartezeit aus der simulierten Stichprobe der Ausdruck

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \quad (18)$$

bestimmt.

3. Bestimmung von Konfidenzintervallen für die mittlere Wartezeit

Der durch Simulation ermittelte Wert für die durchschnittliche Wartezeit ist ein Stichprobenwert und damit ein Schätzwert. Um zu wissen, wie weit dieser von dem Erwartungswert der Zufallsvariablen Wartezeit abweichen kann, muß man eine Vorstellung über die Größe der Streuung der Stichprobenmittelwerte um den Erwartungswert haben.

a. Autokorrelierte Wartezeiten

Der Standardfehler der mittleren Wartezeit kann nicht ohne Berücksichtigung der Tatsache abgeschätzt werden, daß die Wartezeiten der aufeinanderfolgenden Kunden nicht unabhängig voneinander, sondern autokorreliert sind.

1) Vgl. SCHNEEWEISS, H.: Zur Theorie der Warteschlangen. a.a.O. S. 488.

Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn man den Prozeß des Entstehens und des Abbaues einer Warteschlange betrachtet: Hat sich einmal eine lange Warteschlange gebildet, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Kunde, der sich dieser Schlange anschließen muß, lange warten muß, ebenfalls groß. Umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Kunde, der sich an einer kurzen Warteschlange anstellen kann, lange warten muß, geringer.

Ebenso unmittelbar leuchtet ein, daß die Abhängigkeit der Wartezeiten aufeinanderfolgender Kunden umso geringer ist, je größer die Abstände sind, mit denen die Kunden eintreffen. Von einem bestimmten Lag an werden die Wartezeiten praktisch unabhängig voneinander sein.

Wegen der vorhandenen Autokorrelation ist die Zahl der praktisch unabhängigen Beobachtungen in der Stichprobe geringer als die Zahl der tatsächlich durchgespielten Kunden. Die Varianz der mittleren Wartezeit ist entsprechend größer als die Varianz, die sich ergäbe, wenn die Wartezeiten unabhängig voneinander wären¹⁾.

Eine Möglichkeit, die Autokorrelation auszuschalten, besteht darin, nur etwa jede 20., 50. oder 100. Stichprobenbeobachtung der Wartezeit zur Bestimmung der durchschnittlichen Wartezeit und der Varianz der Wartezeiten zu berücksichtigen.

Die Schwierigkeit bei Anwendung dieses Verfahrens liegt darin zu bestimmen, nach welchem Lag die Wartezeiten praktisch als voneinander unabhängig betrachtet werden können. Wählt man den Lag zu klein, erhält man ein zu geringes Konfidenzintervall. Wählt man den Lag

1) Vgl. u.a. EZEKIEL, M., K. A. FOX: Methods of Correlation and Regression Analysis. New York 1966. S. 334f. und GOLDBERGER, A. S.: Econometric Theory. New York-London-Sydney 1965. S. 142ff.

dagegen größer als erforderlich, ist der Rechenaufwand, d.h. die Zahl durchgespielter Kunden, größer als für die Bestimmung eines bestimmten Konfidenzintervalles notwendig. Die Information, die die simulierte Stichprobe gibt, wird nicht voll ausgeschöpft.

Eine zweite Möglichkeit, voneinander unabhängige Beobachtungen zu erhalten, besteht darin, die Simulation mehrmals voneinander unabhängig durchzuführen und für jeden Simulationslauf die durchschnittliche Wartezeit zu bestimmen. Der Stichprobenwert für die durchschnittliche Wartezeit $\bar{t}$ kann dann als Mittelwert der durchschnittlichen Wartezeiten der verschiedenen Simulationsläufe bestimmt werden und die Varianz von $\bar{t}$ als Quotient aus der Varianz der durchschnittlichen Wartezeiten der verschiedenen Simulationsläufe und der Zahl der voneinander unabhängig durchgeführten Simulationsläufe.

Die Schwierigkeit bei diesem Vorgehen besteht darin zu bestimmen, wieviele Kunden bei jedem einzelnen Simulationslauf durchgespielt werden müssen, um sicherzugehen, daß sich die durchschnittliche Wartezeit stabilisiert hat und vom Ausgangszustand des Systems unabhängig ist. Der instabile Zustand müßte bei jedem neuen Simulationslauf erneut überwunden werden.

Die Nachteile dieser beiden Verfahren werden vermieden, wenn die Größe der Autokorrelationskoeffizienten für Lag L ρ_L bekannt ist: Die aus der Stichprobe verfügbare Information wird voll ausgeschöpft. Außerdem braucht nur ein Simulationslauf durchgeführt zu werden, die instabile Phase des Warteprozesses also nur einmal überwunden zu werden.

Bei Vorliegen von Autokorrelation ergibt sich für die Varianz von $\bar{t}$ bei Berücksichtigung jeder der n beob-

achteten Stichprobenwartezeiten¹⁾:

$$\begin{aligned}
 V(\bar{t}) &= \left[V(T) n + 2 V(T) \sum_{L=1}^{n-1} (n-L) \rho_L \right] n^{-2} \\
 &= \left[V(T) n + 2 V(T) \sum_{L=1}^{n-1} \rho_L \right. \\
 &\quad \left. - 2 V(T) \sum_{L=1}^{n-1} L \rho_L \right] n^{-2} \\
 &= \frac{V(T)}{n} \left[1 + 2 \sum_{L=1}^{n-1} \rho_L - \frac{2}{n} \sum_{L=1}^{n-1} L \rho_L \right]. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Hierin ist ρ_L als Autokorrelationskoeffizient für Lag L definiert. $V(T)$ ist die Varianz der Zufallsvariablen Wartezeit.

Wenn ρ_L mit zunehmendem L genügend schnell gegen null konvergiert - dieses kann für praktische Fälle angenommen werden²⁾ -, dann wird für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{2}{n} \sum_{L=1}^{n-1} L \rho_L \rightarrow 0.$$

Es ergibt sich als asymptotische Varianz von $\bar{t}$

$$V(\bar{t}) = \frac{V(T)}{n} \left(1 + 2 \sum_{L=1}^{n-1} \rho_L \right). \quad (20)$$

Wenn die Stichprobenrealisierungen der Zufallsvariablen Wartezeit t_i positiv autokorreliert sind ($\rho > 0$), ist

1) Zur Ableitung dieses Ausdrucks siehe GOLDBERGER, A. S.: *Econometric Theory*. a.a.O. S. 144.

2) Vgl. MORAN, P. A. P.: *The Theory of Storage*. London-New York 1959. S. 20.

diese asymptotische Varianz größer als die "klassische" Varianz $V(T)/n$ ¹⁾.

Um die Größe von

$$A = 1 + 2 \sum_{L=1}^{n-1} \rho_L, \quad (21)$$

mit der die "klassische" Varianz bei Vorliegen von Autokorrelation multipliziert werden muß, numerisch angeben zu können, muß die Folge der sukzessiv aufeinanderfolgenden Autokorrelationskoeffizienten

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$$

bekannt sein.

Für das Modell mit exponentiell verteilten Bedienungs- und Zwischenankunftszeiten und identischen parallelen Schaltern (Modell I.1.) kann gezeigt werden, daß die aufeinanderfolgenden Autokorrelationskoeffizienten eine geometrische Folge bilden, in der die Glieder

$$\rho_L = \rho_1^L \quad (22)$$

sind.

In diesem Fall ergibt sich:

$$\sum_{L=1}^{\infty} \rho_L = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \quad (23)$$

Der Wert der unendlichen Reihe kann also ermittelt werden, wenn der erste Autokorrelationskoeffizient ρ_1

1) Vgl. GOLDBERGER, A. S.: Econometric Theory. a.a.O. S. 153.

bekannt ist¹⁾. Die Hypothese, daß die sukzessiv aufeinanderfolgenden Autokorrelationskoeffizienten eine geometrische Folge der angenommenen Art bilden, kann für große Stichproben auf folgende Weise überprüft werden²⁾:

Es werden die Größen

$$R_L = \rho_L - 2 \rho_1 \rho_{L-1} + \rho_1^2 \rho_{L-2}$$

für $L = 2, 3, \dots$ (24)

berechnet. Für große Stichproben sind $R_2, R_3, \dots$ von ρ_1 unabhängig und unabhängig voneinander. Für große Stichproben sind sie asymptotisch normal und unabhängig verteilt, mit arithmetischem Mittel null und der Varianz:

$$V_L = \frac{(1 - \rho_1^2)^2}{n - L}, \quad (L = 2, 3, \dots). \quad (25)$$

Berechnet man die aufeinanderfolgenden Summen von R_L^2/V_L

$$\chi_k^2 = R_2^2/V_2 + R_3^2/V_3 + \dots + R_{k+1}^2/V_{k+1}, \quad (26)$$

1) Wenn n genügend groß ist, kann $\sum_{L=1}^{n-1} \rho_L$ praktisch $\sum_{L=1}^{\infty} \rho_L$ gleichgesetzt werden. Wenn $\rho_1 = 0,99$ ist, ergibt sich z.B. für ρ_{1000} ein Wert von $0,398 \cdot 10^{-4}$. Für $n = 5800$ (dies ist der für die Lösung durch Simulation verwendete Stichprobenumfang) ergibt sich für ρ_{5800} ein Wert von $0,302 \cdot 10^{-25}$.

2) Siehe TINTNER, G.: Handbuch der Ökonometrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960. S. 296f.

so sind diese für große Stichproben wie χ^2 mit k Freiheitsgraden verteilt.

Bei der Durchführung des Tests müssen die theoretischen Autokorrelationskoeffizienten ρ_L durch ihre Stichprobenwerte r_L ersetzt werden. Die Stichprobenautokorrelationskoeffizienten sind folgendermaßen definiert¹⁾:

$$r_L = \frac{\sum_{i=1}^{n-L} t_i t_{i+L} - \left(\sum_{i=1}^{n-L} t_i\right) \left(\sum_{i=L+1}^n t_i\right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n-L} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-L} t_i\right)^2\right] \left[\sum_{i=L+1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=L+1}^n t_i\right)^2\right]}} \quad (27)$$

Wenn bei der Durchführung des Tests die Sicherheitsprüfungen negativ ausfallen, kann die Nullhypothese, es handle sich um eine geometrische Folge der Form

$$\rho_L = \rho_1^L, \quad ,$$

nicht abgelehnt werden.

Für Modell I.1. wurden auf der Grundlage einer Stichprobe vom Umfang $n = 1000$ die ersten 30 empirischen Autokorrelationskoeffizienten für eine bestimmte Verkehrsdichte für 6 geöffnete Schalter ermittelt. Diese sind in Tabelle 5 (S. 73) wiedergegeben.

In den letzten beiden Spalten von Tabelle 5 sind die Werte des Prüfkriteriums χ_k^2 und die entsprechenden, für ein Signifikanzniveau von 0,05 kritischen Werte χ_c^2 enthalten. Alle Werte χ_k^2 sind kleiner als die Werte χ_c^2 . Die Nullhypothese, es handle sich um eine

1) TINTNER, G.: Handbuch der Ökonometrie. a.a.O. S. 289.

Tabelle 5 - Vergleich der theoretischen und empirischen Verteilung der Autokorrelationskoeffizienten für Lags von 1 bis 30 für Modell I.1.

Lag L	r_L (empirisch)	$\rho_L = r_1^L$ (theoretisch)	Prüfkriterium χ_k^2 (k = L-1)	χ_c^2 für k Freiheitsgrade (k = L-1) und 5%-Signifikanzniveau
1	0,98462	0,98462		
2	0,97081	0,96948	1,908	3,84
3	0,95706	0,95457	1,927	5,99
4	0,94207	0,93988	4,132	7,81
5	0,92829	0,92543	5,156	9,49
6	0,91598	0,91120	6,860	11,1
7	0,90383	0,89718	6,860	12,6
8	0,89212	0,88338	6,944	14,1
9	0,87971	0,86980	7,720	15,5
10	0,86839	0,85642	8,628	16,9
11	0,85659	0,84325	9,041	18,3
12	0,84418	0,83028	9,677	19,7
13	0,83050	0,81751	11,934	21,0
14	0,81691	0,80494	11,952	22,4
15	0,80338	0,79256	11,980	23,7
16	0,78796	0,78037	16,759	25,0
17	0,77313	0,76836	16,862	26,3
18	0,76000	0,75655	19,057	27,6
19	0,74698	0,74491	19,070	28,9
20	0,73424	0,73345	19,074	30,1
21	0,72092	0,72217	19,761	31,4
22	0,70811	0,71107	19,839	32,7
23	0,69545	0,70013	19,844	33,9
24	0,68382	0,68936	20,548	35,2
25	0,67223	0,67876	20,573	36,4
26	0,66060	0,66832	20,629	37,7
27	0,64964	0,65804	20,866	38,9
28	0,63856	0,64792	20,963	40,1
29	0,62795	0,63796	21,047	41,3
30	0,61763	0,62814	21,060	42,6

geometrische Reihe der Form

$$\rho_L = \rho_1^L$$

kann nicht abgelehnt werden.

Wenn diese Hypothese für Modell I.1. für jede Verkehrsdichte und für jede Zahl geöffneter Schalter unterstellt wird, braucht zur Bestimmung des Faktors A (Formel 21) für Modell I.1. nur der Autokorrelationskoeffizient für Lag 1 berechnet zu werden. Es ergibt sich dann allgemein für Modell I.1. für die Varianz von $\bar{t}$:

$$\begin{aligned} V(\bar{t}) &= \frac{s_t^2}{n-1} A \\ &= \frac{s_t^2}{n-1} \left(1 + 2 \sum_{L=1}^{\infty} r_1^L \right) \\ &= \frac{s_t^2}{n-1} \left(1 + 2 \frac{r_1}{1-r_1} \right) \\ &= \frac{s_t^2}{n-1} \frac{1+r_1}{1-r_1} . \end{aligned} \quad (28)$$

Hierin ist s_t^2 die Stichprobenvarianz der Wartezeiten.

Die Stichprobe vom Umfang $n = 1000$ ergab folgende Werte für $\bar{t}$ und s_t^2 :

$$\bar{t} = 30,60 \quad 1/100 \text{ min}$$

$$s_t^2 = 3321,35$$

Für A ergibt sich

$$A = \frac{1 + 0,98462}{1 - 0,98462} = 129,04.$$

Dieses Ergebnis bedeutet, daß bei der zugrundegelegten Ankunftsrate, Bedienungsrate und Schalterzahl 129 mal soviele Kunden durchgespielt werden müssen, um eine gleich hohe Varianz für $\bar{t}$ zu erhalten, wie durchgespielt werden müßten, wenn die Wartezeiten nicht autokorreliert wären¹⁾.

Es ergibt sich für die Stichprobe folgender Standardfehler der mittleren Wartezeit:

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{3321,35}{999}} \cdot 129,04 = \sqrt{428,59} = 20,70 \quad .$$

Als 95 % - Konfidenzintervall für die mittlere Wartezeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 30,60 - 1,96 \cdot 20,70 &\leq E(T) \leq 30,60 + 1,96 \cdot 20,70 \\ - 9,97 &\leq E(T) \leq 71,17 \\ 0 &\leq E(T) \leq 71,17 \quad . \end{aligned}$$

Für Modell II.1. und II.2. ergibt sich ein anderes Bild als für Modell I.1.:

Aufgrund der gleichen Verkehrsdichte und der gleichen Zahl geöffneter Schalter wurde ebenfalls für eine Stichprobe vom Umfang $n = 1000$ die Verteilung der Autokorrelationskoeffizienten für Lag 1 bis 30 ermittelt (siehe Tabelle 6, S. 76).

Die Folge der aufeinanderfolgenden Autokorrelations-

1) Vgl. hierzu auch GEBHARD, R. F.: A Limiting Distribution of an Estimate of Mean Queue Length. In: Operations Research 11 (1963). S. 1000 - 1003. GEBHARD ermittelt einen Ausdruck für die Varianz der mittleren Schlängenlänge als Funktion von λ/μ für ein Ein-Schalter-System mit exponentiell verteilten Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten. Die Erhöhung der Varianz durch Autokorrelation ist danach umso größer, je größer λ/μ ist.

Tabelle 6 - Verteilung der empirischen Autokorrelationskoeffizienten für Lags von 1 bis 30 für Modell II.1. und Modell II.2.

Lag L	Modell II.1.		Modell II.2.	
	r_L (empirisch)	$q_L = \frac{r_L}{r_{L-1}}$	r_L (empirisch)	$q_L = \frac{r_L}{r_{L-1}}$
1	0,48467		0,88758	
2	0,47183	0,97351	0,86440	0,97388
3	0,47321	1,00292	0,85426	0,98827
4	0,44771	0,94611	0,84667	0,99112
5	0,44428	0,99234	0,93867	0,99056
6	0,44463	1,00079	0,83362	0,99398
7	0,42675	0,95979	0,82529	0,99001
8	0,44279	1,03759	0,81768	0,99078
9	0,45042	1,01723	0,82334	1,00692
10	0,46949	1,04234	0,81351	0,99025
11	0,43086	0,91772	0,81813	1,00568
12	0,43211	1,00290	0,81559	0,99690
13	0,43572	1,00835	0,79751	0,97783
14	0,39829	0,91410	0,78141	0,97981
15	0,42763	1,07366	0,77620	0,99333
16	0,39883	0,93265	0,77064	0,99284
17	0,37979	0,95226	0,75849	0,98423
18	0,38423	1,01169	0,75377	0,99378
19	0,40062	1,04266	0,74851	0,99302
20	0,37595	0,93842	0,73672	0,98425
21	0,38963	1,03639	0,73778	1,00144
22	0,36385	0,93383	0,72972	0,90908
23	0,38313	1,05299	0,71376	0,97813
24	0,36410	0,95033	0,70943	0,99393
25	0,34831	0,95663	0,70889	0,99924
26	0,35891	1,03043	0,70431	0,99354
27	0,33915	0,94494	0,69273	0,98356
28	0,34566	1,01920	0,68797	0,99313
29	0,34023	0,98458	0,68197	0,99128
30	0,30336	0,89163	0,67371	0,98789

koeffizienten läßt sich nicht wie für Modell I.1. durch eine Folge der Form

$$\rho_1, \rho_1^2, \rho_1^3, \dots$$

beschreiben. Die Autokorrelationskoeffizienten nehmen mit zunehmendem Lag langsamer ab als in Modell I.1. Eine Betrachtung der Quotienten aus aufeinanderfolgenden Autokorrelationskoeffizienten (Tabelle 6) legt jedoch den Schluß nahe, daß für Modell II.1. und II.2. eine konvergierende geometrische Folge der Form

$$\rho_1, a\rho_1, a^2\rho_1, \dots$$

mit dem allgemeinen Glied

$$\rho_L = \rho_1 a^{L-1}$$

vorliegt. Die (unendliche) geometrische Reihe hat dann den Wert

$$\sum_{L=1}^{\infty} \rho_L = \frac{\rho_1}{1-a} \quad . \quad (29)$$

a kann geschätzt werden als arithmetisches Mittel der einzelnen Quotienten $q_L = \frac{r_L}{r_{L-1}}$:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{L=2}^{30} q_L}{29} \quad . \quad (30)$$

Aus der Stichprobe ergibt sich für Modell II.1. ein Wert für $\hat{a}$ von 0,98510 und für Modell II.2. ein Wert für $\hat{a}$ von 0,99064. Die Stichprobenvarianz der q_L beträgt für Modell II.1. 0,0021979 und für Modell II.2. 0,0000569871. Sie ist damit so niedrig, daß es als praktikabel erscheint, $\hat{a}$ als Schätzwert für den

Quotienten der geometrischen Reihe zu verwenden.

Für die Modelle, in denen keine identischen parallelen Schalter angenommen worden sind, läßt sich die Summe der aufeinanderfolgenden Autokorrelationskoeffizienten also nicht wie für Modell I.1. aus dem ersten Koeffizienten berechnen. Der Quotient a kann nur geschätzt werden, wenn auch Autokorrelationskoeffizienten höherer Ordnung ermittelt worden sind. Da die Ermittlung dieser auch bei Einsatz einer elektronischen Rechenanlage sehr aufwendig ist und da möglichst viele Modellvarianten durchgespielt werden sollen, wird auf ihre Ermittlung für die Modellösung verzichtet. Die mittleren Wartezeiten für die zweite Modell-Gruppe werden dementsprechend ohne Konfidenzintervalle angegeben.

Die Größenordnung dieser Konfidenzintervalle und damit auch die erforderliche Zahl von Kunden, die zur Ermittlung der durchschnittlichen Wartezeiten für die zweite Modell-Gruppe durchgespielt werden muß, läßt sich jedoch aus den dargelegten Ergebnissen für die Stichprobe vom Umfang $n = 1000$ abschätzen:

Für Modell II.1. (Modell für die Ist-Organisation der Schalter) ergaben sich folgende Werte für $\bar{t}$ und s_t^2 :

$$\bar{t} = 88,61 \quad 1/100 \text{ min}$$

$$s_t^2 = 13084 \quad .$$

Für A ergibt sich:

$$A = 1 + 2 \frac{r_1}{1 - \bar{a}}$$

$$= 1 + 2 \frac{0,48467}{1 - 0,98510} = 66,06 \quad .$$

Damit ergibt sich für $\tilde{G}_t$:

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{13084}{999} \cdot 66,06} = 29,4 \quad .$$

Als 95 % - Konfidenzintervall für die mittlere Wartezeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 88,61 - 1,96 \cdot 29,4 &\leq E(T) \leq 88,61 + 1,96 \cdot 29,4 \\ 31,0 &\leq E(T) \leq 146,2 \quad . \end{aligned}$$

Für Modell II.2. (Modell für die modifizierte Allzweckorganisation der Schalter) ergaben sich folgende Werte für $\bar{t}$ und s_t^2 :

$$\bar{t} = 53,76 \quad 1/100 \text{ min}$$

$$s_t^2 = 6764 \quad .$$

Für A ergibt sich:

$$A = 1 + 2 \frac{0,88758}{1 - 0,99064} = 190,65 \quad .$$

Damit ergibt sich für $\sigma_{\bar{t}}$:

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{6764}{999} \cdot 190,65} = 35,9 \quad .$$

Als 95 % - Konfidenzintervall für die mittlere Wartezeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} 53,76 - 1,96 \cdot 35,9 &\leq E(T) \leq 53,76 + 1,96 \cdot 35,9 \\ - 16,6 &\leq E(T) \leq 124,1 \\ 0 &\leq E(T) \leq 124,1 \quad . \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse zeigen, daß die Varianz der mittleren Wartezeit wegen der hohen Varianz der Wartezeiten und der hohen Autokorrelation so hoch ist, daß aus einer

Stichprobe in der Größenordnung von $n = 1000$ ermittelte Schätzwerte innerhalb so großer Konfidenzintervalle liegen, daß eine sinnvolle Aussage nicht gemacht werden kann.

Will man einigermaßen gesicherte Ergebnisse erzielen, müssen die simulierten Stichproben deshalb einen sehr großen Umfang haben. Eine Simulation "von Hand" ist deshalb auf jeden Fall zu zeitaufwendig.

Aber auch bei Einsatz einer elektronischen Großrechenanlage ist die für die Simulation großer Stichproben erforderliche Rechenzeit so hoch, daß die Untersuchung sich auf die Lösung weniger Modellvarianten beschränken müßte, wenn es nicht gelänge, durch Entwicklung und Anwendung von Verfahren, die zu einer Reduzierung der Varianz führen, die Anwendung der Monte Carlo-Methode effizienter zu machen.

b. Varianzreduzierungsverfahren

Die bloße Nachbildung des Warteprozesses selbst auf einer elektronischen Rechenanlage ist wenig problematisch, aber sehr zeitaufwendig.

In dieser Untersuchung ist geplant, die Effizienz verschiedener Schalterorganisationen und verschiedener Zahl installierter Zahlkartenannahme-Maschinen nicht nur für eine bestimmte Schalterzahl und eine bestimmte Verkehrsdichte zu vergleichen, sondern die durchschnittliche Wartezeit auch als Funktion verschiedener Zahl besetzter Schalter und verschiedener Zahl pro 30 min eintreffender Kunden zu ermitteln. Bei gegebener Rechenzeit hängt die Zahl der Modellvarianten, die durchgespielt werden können, und/oder die Genauigkeit der Ergebnisse davon ab, wie wirtschaftlich die Simulation durchgeführt wird. Die Durchführung der

Simulation ist umso wirtschaftlicher, je geringer die Zahl der Kunden ist, die für eine Modellvariante durchgespielt werden muß, um die durchschnittliche Wartezeit in einem Konfidenzintervall bestimmter Größe angeben zu können, je kleiner also die Stichprobe ist, aus der eine bestimmte Größe für die Varianz der Stichprobenmittelwerte bestimmt wird. Verfahren, durch die die Varianz bei gegebenem Stichprobenumfang reduziert bzw. eine gegebene Varianz durch einen geringeren Stichprobenumfang als ohne Anwendung dieser Verfahren erzielt werden kann, werden als Varianzreduzierungsverfahren bezeichnet. Es wurde die Effizienz zweier Verfahren untersucht:

a. Die Methode der Antithetic Variates¹⁾

Eine Folge von Kunden mit kurzen Zwischenankunftszeiten und langen Bedienungszeiten wird das Entstehen einer Warteschlange verursachen. Umgekehrt wird eine Folge von Kunden mit langen Zwischenankunfts- und kurzen Bedienungszeiten eine bestehende Warteschlange abbauen. Das Ziel der Anwendung der Methode der Antithetic Variates ist es, beim Simulieren zu Perioden mit langen Warteschlangen korrespondierende Perioden mit kurzen Warteschlangen zu erhalten. Um dieses Ziel zu erreichen, muß dafür gesorgt werden, daß zu Kunden mit kurzen Zwischenankunftszeiten und langen Bedienungszeiten simultan Kunden mit langen Zwischenankunftszeiten und kurzen Bedienungszeiten durchgespielt

1) Dieses Verfahren ist dargestellt bei PAGE, E. S.: On Monte Carlo Methods in Congestion Problems: II. Simulation of Queueing Problems. In: Operations Research 13 (1965). S. 300 - 305.

werden. Anders ausgedrückt bedeutet das, daß sich entsprechende Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten möglichst stark negativ miteinander korreliert sein müssen. Da diese Zeiten Funktionen der gleichverteilten Zufallsvariablen z_i sind, müssen diese z_i für den simultanen zweiten Lauf so transformiert werden, daß negativ korrelierte Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten entstehen.

Dies kann auf mehreren Wegen erreicht werden. Zwei einfache Methoden sind, wenn z_{a_i} die Zufallszahl bezeichnet, mit der eine Zwischenankunftszeit t_{a_i} bestimmt wird, und z_{b_i} die Zufallszahl bezeichnet, mit der eine Bedienungszeit t_{b_i} bestimmt wird, folgende:

$$z'_{a_i} = 1 - z_{a_i} \quad , \quad z'_{b_i} = 1 - z_{b_i} \quad (31)$$

und

$$z'_{a_i} = z_{b_i} \quad , \quad z'_{b_i} = z_{a_i} \quad (32)$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen Zwischenankunfts- und Bedienungszeit ist trotz Transformation gleich, da die Zufallszahlen z_i auch nach der Transformation zwischen 0 und 1 gleichverteilt sind. Damit ist auch der Erwartungswert der Zufallsvariablen Wartezeit gleich. Die Varianz der Wartezeiten wird als Varianz der arithmetischen Mittel jeweils zweier simultan durchgespielten Kunden berechnet:

$$V'(T) = \frac{\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{t_i + t'_i}{2} \right)^2}{\frac{n}{2}} - \bar{t}^2 \quad . \quad (33)$$

Hierin sind die t_i die mit z_{a_i} und z_{b_i} und die t'_i die mit z'_{a_i} und z'_{b_i} ermittelten Wartezeiten. Der Stichprobenumfang n ist gleich der Summe aus der Zahl der in den korrespondierenden Läufen durchgespielten Kunden.

Die Komplexität von Warteschlangenproblemen verhindert es gewöhnlich, direkte Überlegungen darüber anzustellen, welche Methode zu der stärksten Varianzreduzierung führt. Dies kann nur durch Experiment herausgefunden werden.

PAGE¹⁾ hat, um die mögliche Effizienz der Methode der Antithetic Variates zu demonstrieren, für das einfachste Warteschlangenmodell, ein Ein-Schalter-System mit exponentiell verteilten Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten, für Folgen von 500 Kunden für beide Methoden gezeigt, daß nur etwa die Hälfte der Kunden durchgespielt werden mußte, um ein gleich enges Konfidenzintervall für die mittlere Wartezeit wie ohne Anwendung der Methoden zu erhalten.

Für das vorliegende Warteschlangenmodell wurde experimentell herausgefunden, daß für mehrere Schalter im Gegensatz zu dem von PAGE untersuchten Ein-Schalter-System durch die Anwendung beider Methoden die Varianz der mittleren Wartezeit nur auf etwa 90 % bis 95 % reduziert werden konnte²⁾.

Die Methode der Antithetic Variates wurde deshalb in dieser Untersuchung nicht angewendet.

1) PAGE, E. S.: On Monte Carlo Methods ... a.a.O.

2) Es wurde zwar die Varianz der Wartezeiten $V(T)$ erheblich reduziert. Dieser Vorteil wurde jedoch fast vollständig dadurch ausgeglichen, daß bei der Ermittlung der Varianz der mittleren Wartezeit $V(\bar{t})$ nur durch $n/2$ statt durch n dividiert werden konnte.

ß. Varianzreduzierung durch Transformation der Wartezeitverteilung

Dieses Verfahren beruht darauf, daß die Zufallsvariable Wartezeit und/oder ihre zugehörige Dichte so transformiert werden, daß die Varianz der Wartezeiten reduziert wird, ohne daß sich der Erwartungswert der Zufallsvariablen Wartezeit ändert. Voraussetzung für die Anwendung eines solchen Verfahrens ist es, daß die Verteilungsfunktion der zu transformierenden Zufallsvariablen, in diesem Fall also der Wartezeiten, bekannt ist. Dies ist für Systeme, die simuliert werden müssen, nicht der Fall.

Die Funktion der Verteilung kann jedoch aus einer simulierten Vorstichprobe geschätzt werden. Für die untersuchten Modelle läßt sich zeigen, daß die Wartezeitverteilung derjenigen, die eine Wartezeit größer als null haben, also derjenigen, die überhaupt warten müssen, wie in dem analytisch lösbaren Modell mit exponentiell verteilten Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten und identischen parallelen Schaltern durch eine Exponentialverteilung beschrieben werden kann.

Die in Tabelle 7 (S. 85) dargestellten Stichprobenverteilungen der Wartezeiten für die Modelle I.2., II.1. und II.2. beruhen auf einer Stichprobe vom Umfang $n = 20000$. Für alle drei Modelle ist gleiche Verkehrsdichte und eine Schalteröffnungszahl von 6 zugrundegelegt worden. Bei der Anwendung des χ^2 - Tests mußte die Autokorrelation der Wartezeiten möglichst weitgehend ausgeschaltet werden. Dieses wurde dadurch erreicht, daß nur jede 50. Wartezeit-Beobachtung berücksichtigt wurde. Den empirischen Häufigkeitsverteilungen der Wartezeiten sind in Tabelle 7 entsprechende Exponentialverteilungen mit gleichem Mittelwert gegenübergestellt. Für Modell I.2. ergibt der χ^2 - Test einen

Tabelle 7 - Vergleich der durch Simulation gefundenen Wartezeitverteilungen für die Modelle I.2., II.1. und II.2. mit entsprechenden Exponentialverteilungen

Wartezeit (1/100 min)	Modell I.2. ($\bar{t}_w = 59,8$ 1/100 min)		Modell II.1. ($\bar{t}_w = 123,4$ 1/100 min)		Modell II.2. ($\bar{t}_w = 85,5$ 1/100 min)	
	empi- risch	expo- nen- tiell	empi- risch	expo- nen- tiell	empi- risch	expo- nen- tiell
über 0- 15	36	43	30	30	36	40
" 15- 30	46	33	27	27	38	33
" 30- 45	30	26	25	24	24	28
" 45- 60	21	20	20	21	26	24
" 60- 75	9	16	20	18	29	19
" 75- 90	11	12	13	16	19	17
" 90-105	10	10	24	15	15	14
" 105-120	3 } ¹³	7 } ¹⁷	14	13	14	11
" 120-150	10	10	16	22	15	18
" 150-180	5	6	19	17	9	13
" 180-210	5	4	9	13	5	9
" 210-240	2	} 6	7	10	4 } ¹¹	6 } ¹⁰
" 240-270	2		8	8	7	4
" 270-300	1		9	7	6	} 11
" 300-350	1		8	8	4 } ¹⁴	
" 350-400	1	} 6	4	5	3	
" 400-500			5	5	1	
" 500-600			3 } ⁶	} 5		
" 600-800			3			
Spaltensumme	193	193	264	264	247	247

Wert von 11,6 bei 9 Freiheitsgraden gegenüber einem bei einem Signifikanzniveau von 0,05 kritischen Wert χ_c^2 von 16,9. Für Modell II.1. findet man einen Wert für χ^2 von 11,3 bei 16 Freiheitsgraden gegenüber einem Wert für χ_c^2 von 26,3 und für Modell II.2. ergibt sich ein Wert für χ^2 von 7,4 bei 11 Freiheitsgraden gegenüber einem Wert für χ_c^2 von 19,7. Für alle drei Modelle sind also die Werte für χ^2 so klein, daß die Nullhypothese, es handle sich bei den empirisch gefundenen Verteilungen um Exponentialverteilungen, nicht abgelehnt werden kann.

Es läßt sich nun allgemein folgende Transformation durchführen, die zwar nicht den Erwartungswert der Zufallsvariablen, wohl aber ihre Varianz verändert¹⁾:

Wenn für das Integral

$$E(T_w) = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (34)$$

der Integrand mit einer Dichtefunktion $h(t)$ multipliziert und durch diese dividiert wird, kann $E(T_w)$ geschrieben werden als:

$$E^*(T_w) = \int_0^{\infty} t \frac{f(t)}{h(t)} h(t) dt = E(T_w) \quad (h(t) \neq 0). \quad (35)$$

Für die Varianz erhält man durch diese Transformation

$$V^*(T_w) = \int_0^{\infty} \left(t \frac{f(t)}{h(t)} \right)^2 h(t) dt - E(T_w)^2 \quad (36)$$

1) Vgl. MEYER, H.A. (Hrsg.): Symposium on Monte Carlo Methods. New York - London 1956. S. 123ff. und S. 158ff.

statt

$$V(T_w) = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - E(T_w)^2. \quad (37)$$

Wählt man für die Dichtefunktion $h(t)$ die Form

$$h(t) = \alpha \exp(-\alpha t), \quad (38)$$

also eine Exponentialverteilung mit dem Parameter α , so ergibt sich für den vorliegenden Fall exponentiell verteilter Wartezeiten¹⁾

$$E(T_w) = \int_0^{\infty} t \frac{\theta \exp(-\theta t)}{\alpha \exp(-\alpha t)} \alpha \exp(-\alpha t) dt = \frac{1}{\theta} \quad (\theta = c\mu - \lambda) \quad (39)$$

und

$$\begin{aligned} V^*(T_w) &= \int_0^{\infty} \left(t \frac{\theta \exp(-\theta t)}{\alpha \exp(-\alpha t)} \right)^2 \alpha \exp(-\alpha t) dt - \frac{1}{\theta^2} \\ &= \int_0^{\infty} t^2 \frac{\theta^2}{\alpha} \exp[-(2\theta - \alpha)t] dt - \frac{1}{\theta^2} \\ &= \frac{2\theta^2}{\alpha(2\theta - \alpha)^3} - \frac{1}{\theta^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Differenziert man $V^*(T_w)$ nach $d\alpha$, so ergibt sich:

$$\frac{dV^*(T_w)}{d\alpha} = \alpha^3 - 4,5\theta\alpha^2 + 6\theta^2\alpha - 2\theta^3. \quad (41)$$

Setzt man diese 1. Ableitung gleich null:

$$\alpha^3 - 4,5\theta\alpha^2 + 6\theta^2\alpha - 2\theta^3 = 0 \quad (42)$$

und löst diese kubische Gleichung für α , dann erhält

1) Vgl. S. 55, Formel 8 - 10.

man

$$\alpha_1 = \frac{\theta}{2} \text{ und } \alpha_{2,3} = 2\theta \quad . \quad (43)$$

Nur für $\alpha = \frac{\theta}{2}$ ergibt sich ein Minimum. $V^*(T_w)$ nimmt für $\alpha = \theta/2$ folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} V^*(T_w) &= \frac{2\theta^2}{\alpha (2\theta - \alpha)^3} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{2\theta^2}{\frac{\theta}{2} (2\theta - \frac{\theta}{2})^3} - \frac{1}{\theta^2} \\ &= \frac{0,625}{3,375} \frac{1}{\theta^2} = 0,1852 V(T_w) \quad . \quad (44) \end{aligned}$$

Die Varianz der Wartezeiten derjenigen, die eine Wartezeit größer als null haben, wird also auf 18,52 % reduziert.

Wenn die durch Simulation ermittelten Wartezeiten t_{w_i} in Klassen einer bestimmten Intervallbreite mit den Klassenmittelwerten t_{w_j} und mit bestimmten Klassenhäufigkeiten $h(t_{w_j})$ vorliegen, wird der Stichprobenwert für die mittlere Wartezeit ohne Anwendung des Transformationsverfahrens nach folgendem Ausdruck bestimmt:

$$\bar{t}_w = \frac{1}{n_w} \sum_j t_{w_j} h(t_{w_j}) \quad . \quad (45)$$

Wendet man dagegen das oben beschriebene, von MARSHALL¹⁾ und KAHN²⁾ dargestellte Verfahren bei der Monte Carlo - Simulation an, dann müssen sowohl die t_{w_j} als auch ihre zugehörigen $h(t_{w_j})$ transformiert werden.

1) MEYER, H. A. (Hrsg.): Symposium on Monte Carlo Methods. a.a.O. S. 123ff.

2) Ebenda, S. 158ff.

Für die Transformation der t_{w_j} gilt:

$$\begin{aligned}
 t_{w_j}^* &= t_{w_j} \frac{\exp(-\hat{\theta} t_{w_j})}{\exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_j})} \\
 &= t_{w_j} \cdot 2 \cdot \exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_j}) \quad . \quad (46)
 \end{aligned}$$

Als Schätzwert $\hat{\theta}$ für θ wird $1/\bar{t}_w$ verwendet (siehe Formel 39). Nun ist aber $\bar{t}_w$ erst bekannt, wenn alle n Wartezeiten der Stichprobe simuliert worden sind. Dies hat die simulationstechnische Konsequenz, daß zunächst alle Wartezeiten abgespeichert werden müssen; sodann muß $\bar{t}_w$ berechnet werden, bevor die abgespeicherten Wartezeiten transformiert werden können.

Die Transformation der Häufigkeiten ist problematisch. Sie könnte folgendermaßen vorgenommen werden: Der Erwartungswert für die relative Häufigkeit der Klasse j ist für die nicht transformierte Exponentialverteilung

$$\begin{aligned}
 E [f(t_{w_j})] &= [1 - \exp(-\hat{\theta} t_{w_j})] - [1 - \exp(-\hat{\theta} t_{w_{j-1}})] \\
 &= \exp(-\hat{\theta} t_{w_{j-1}}) - \exp(-\hat{\theta} t_{w_j}) \quad (47)
 \end{aligned}$$

und für die transformierte Verteilung

$$E [f^*(t_{w_j})] = \exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_{j-1}}) - \exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_j}) \quad . \quad (48)$$

Der Quotient aus diesen beiden Ausdrücken kann als Transformationsfaktor verwendet werden.

Dann ist:

$$h^*(t_{w_j}) = \frac{\exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_{j-1}}) - \exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_j})}{\exp(-\hat{\theta} t_{w_{j-1}}) - \exp(-\hat{\theta} t_{w_j})} h(t_{w_j}) \quad (49)$$

Diesen beiden Transformationen entsprechend wird der Stichprobenwert der mittleren Wartezeit derjenigen, die überhaupt warten müssen, nach folgendem Ausdruck bestimmt:

$$\begin{aligned} \bar{t}_w^* &= \frac{1}{n_w} \sum_j 2 t_{w_j} \exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_j}) \\ &\cdot \frac{\exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_{j-1}}) - \exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_j})}{\exp(-\hat{\theta} t_{w_{j-1}}) - \exp(-\hat{\theta} t_{w_j})} h(t_{w_j}) \quad (50) \end{aligned}$$

Für die Varianz der Wartezeiten derjenigen, die eine Wartezeit größer als null haben, ergibt sich statt

$$s_{t_w}^2 = \frac{1}{n_w} \sum_j t_{w_j}^2 h(t_{w_j}) - \bar{t}_w^2 \quad (51)$$

$$\begin{aligned} s_{t_w}^{*2} &= \frac{1}{n_w} \sum_j 4 t_{w_j}^2 \exp(-\hat{\theta} t_{w_j}) \\ &\cdot \frac{\exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_{j-1}}) - \exp(-\frac{\hat{\theta}}{2} t_{w_j})}{\exp(-\hat{\theta} t_{w_{j-1}}) - \exp(-\hat{\theta} t_{w_j})} h(t_{w_j}) - \bar{t}_w^{*2} \quad (52) \end{aligned}$$

Dadurch bedingt, daß auch die Häufigkeiten bei Anwendung dieses Verfahrens transformiert werden müssen, ist dieses Verfahren umständlich zu handhaben.

Das dargestellte Verfahren läßt sich jedoch so abwandeln, daß nur die Wartezeiten, nicht jedoch die Häufigkeiten transformiert werden müssen.

Es ist

$$\begin{aligned} E^*(T_w) &= \int_0^{\infty} t \theta \exp(-\theta t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \epsilon^2 t \theta \exp(-\epsilon \theta t) dt = E(T_w) \\ &= \int_0^{\infty} \epsilon^2 t \exp[-(\epsilon - 1) \theta t] \theta \exp(-\theta t) dt . \end{aligned} \quad (53)$$

Es entsprechen sich $[t]$ und $[\epsilon^2 t \exp(-(\epsilon - 1) \theta t)]$, während die Dichtefunktion sich nicht geändert hat.

Die transformierte Varianz ist jetzt:

$$\begin{aligned} V^*(T_w) &= \int_0^{\infty} \epsilon^4 t^2 \exp[-2(\epsilon - 1) \theta t] \theta \exp(-\theta t) dt \\ &\quad - E(T_w)^2 \\ &= \int_0^{\infty} \epsilon^4 \theta t^2 \exp[-(2\epsilon - 1) \theta t] dt - E(T_w)^2 \\ &= \frac{2 \epsilon^4}{(2\epsilon - 1)^3 \theta^2} - \frac{1}{\theta^2} . \end{aligned} \quad (54)$$

Hier muß der Parameter ϵ so gewählt werden, daß die Varianz minimiert wird. Differenziert man nach ϵ und setzt die 1. Ableitung gleich null, so ergibt sich:

$$\epsilon^3 - 3\epsilon^2 + \frac{9}{4}\epsilon - \frac{1}{2} = 0 . \quad (55)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt für $\epsilon_{1,2,3}$:

$$\epsilon_1 = 2 \quad \text{und} \quad \epsilon_{2,3} = \frac{1}{2} \quad . \quad (56)$$

Nur für $\epsilon = \epsilon_1 = 2$ ergibt sich ein Minimum. $V^*(T_w)$ nimmt für $\epsilon = 2$ folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} V^*(T_w) &= \frac{2 \epsilon^4}{(2\epsilon - 1)^3 \theta^2} - \frac{1}{\theta^2} \\ &= \frac{32}{27 \theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = 0,1852 V(T_w) \quad . \quad (57) \end{aligned}$$

Die Varianz der Wartezeiten, die größer als null sind, wird also wie oben auf 18,52 % reduziert.

Der Stichprobenwert für die durchschnittliche Wartezeit wird jetzt berechnet als

$$\bar{t}_w^* = \frac{1}{n_w} \sum_j 4 \cdot t_{wj} \exp(-\hat{\theta} t_{wj}) h(t_{wj}) \quad (\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{t}}) \quad (58)$$

und die Stichprobenvarianz als

$$\begin{aligned} s_{t_w}^{*2} &= \frac{1}{n_w} \sum_j 16 t_{wj}^2 \exp(-2 \hat{\theta} t_{wj}) h(t_{wj}) - \bar{t}_w^{*2} \\ &= \frac{1}{n_w} \sum_j t_{wj}^{*2} h(t_{wj}) - \bar{t}_w^{*2} \quad . \quad (59) \end{aligned}$$

Dieses zweite Verfahren wird zur Reduzierung der Varianz in dieser Untersuchung angewendet.

Bildlich gesehen bewirkt die Anwendung dieses Verfahrens, daß die Verteilung der Wartezeiten gestaucht wird. Wartezeiten, die kleiner als die mittlere Wartezeit der Verteilung sind, werden herauftransformiert,

Wartezeiten, die größer als der Mittelwert sind, werden heruntertransformiert.

Da nicht die durchschnittliche Wartezeit derjenigen, die eine Wartezeit größer als null haben, sondern die durchschnittliche Wartezeit aller Kunden $\bar{t}$ und die Varianz s_t^2 bestimmt werden soll, muß nicht durch n_w (die Zahl der Kunden in der Stichprobe, die warten), sondern durch n dividiert werden.

Unter Berücksichtigung der Autokorrelation der Wartezeiten ergibt sich für den Stichprobenmittelwert $\bar{t}$ und für die Varianz der Stichprobenmittelwerte $V(\bar{t})$:

$$\bar{t} = \frac{4}{n} \sum_j t_{wj} \exp(-\theta t_{wj}) h(t_{wj}) \quad (60)$$

$$V(\bar{t}) = \frac{1}{n} \left(1 + 2 \frac{r_1}{1 - \hat{a}} \right) \frac{16}{n} \sum_j t_{wj}^2 \cdot \exp(-2\hat{\theta} t_{wj}) h(t_{wj}) - \bar{t}^2 \quad (61)$$

Für Modell I.1., das Modell mit identischen parallelen Schaltern und exponentiell verteilten Zwischenankunfts- und Bedienungszeiten, wird $\hat{a} = r_1$.

4. Stabilisierungsdauer der durchschnittlichen Wartezeit

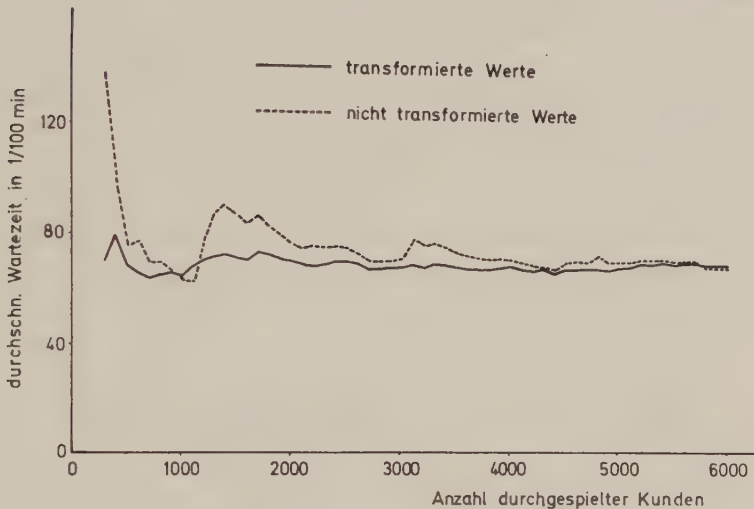
Bei der Simulation des Warteprozesses muß von einem bestimmten Anfangszustand des Systems ausgegangen werden. Dies bedeutet, daß man die Zahl der Kunden, die zu Beginn des Simulationsprozesses vor den Schaltern warten bzw. bedient werden, festlegen muß. So kann man z.B. die Simulation mit dem Leerzustand des Systems beginnen, also dem Zustand, in dem überhaupt kein Kunde wartet oder bedient wird.

Es ist klar, daß dann die ersten eintreffenden Kunden nicht warten müssen, sondern gleich bedient werden können. Es muß deshalb zunächst eine bestimmte Zahl von Kunden durchgespielt werden, ehe die entstehenden Wartezeiten unabhängig von dem Anfangszustand des Systems sind. Die Wartezeiten dieser ersten Kunden dürfen bei der Berechnung der durchschnittlichen Wartezeit nicht berücksichtigt werden.

Für die durchgeführten Simulationsläufe wird angenommen, daß nach Durchspielung von 200 Kunden die entstehenden Wartezeiten unabhängig vom Anfangszustand des Systems sind.

Wie lange es dauert, bis sich die durchschnittliche Wartezeit stabilisiert, ist in Abbildung 13 (S. 95) für eine Verkehrsdichte von 196 Kunden pro halbe Stunde für 6 geöffnete Schalter für das Modell für die Ist-Organisation (Modell II.1.) veranschaulicht. In dieser Abbildung zeigt die gestrichelte Linie die Entwicklung der durchschnittlichen Wartezeit, wie sie aus den nicht transformierten Werten errechnet wurde, und die durchgezogene Linie die Entwicklung der durchschnittlichen Wartezeit, wie sie nach Anwendung des

Abbildung 13 - Stabilisierungsdauer der durchschnittlichen Wartezeit



Varianzreduzierungsverfahren ermittelt wurde. Zur Ermittlung der Stabilisierungsdauer wurde das Programm für die elektronische Rechanlage so modifiziert, daß nach Durchspielung von jeweils 100 Kunden die bis dahin ermittelte durchschnittliche Wartezeit berechnet und ausgedruckt werden konnte.

Für die Bestimmung der Stabilisierungsdauer der durchschnittlichen Wartezeit bei Anwendung des Varianzreduzierungsverfahrens mußte der Simulationslauf wiederholt werden, da die einzelnen Wartezeiten erst dann transformiert werden können, wenn die durchschnittli-

che Wartezeit für alle durchgespielten Kunden bekannt ist (siehe Formel 58, S. 92). Der Vergleich der Stabilisierungsdauer mit und ohne Anwendung des Varianzreduzierungsverfahrens (Abbildung 13) beruht auf identischen Kundenwartezeiten, da der Warteprozess mit Hilfe von identisch wiederholten Wartezeiten nachgebildet wird.

Abbildung 13 zeigt, daß auch ohne Durchführung der Transformation die durchschnittliche Wartezeit nach Durchspielung von 6000 Kunden einen ziemlich stabilen Zustand erreicht hat, daß jedoch dieser stabile Zustand bei Anwendung des Transformationsverfahrens wesentlich eher erreicht wird.

5. Programmablaufplan für eine elektronische Rechenmaschine

Die mittleren Wartezeiten wurden auf einer IBM 360/50 im wesentlichen nach folgendem Programmablaufplan ermittelt:

Zunächst wurden die Zwischenankunftszeitverteilung (über ihren Parameter λ) und die Bedienungszeitverteilungen für die verschiedenen Schaltergeschäfte sowie die relative Häufigkeitsverteilung der Schaltergeschäfte der Maschine eingelesen. Die Matrix-Darstellung der Schalterorganisation (Abbildung 9, S. 34) erwies sich für die Programmierung als besonders zweckmäßig. Der Maschine wurde die Schalter/Schaltergeschäfte-Matrix in folgender Weise eingelesen:

Den Matrizenfeldern, die ausdrücken sollten, daß ein bestimmtes Schaltergeschäft an einem bestimmten Schalter erledigt werden kann, wurde der Wert 0 gegeben, und den Matrizenfeldern, die ausdrücken sollten, daß

ein bestimmtes Schaltergeschäft an einem bestimmten Schalter nicht erledigt werden kann, ein sehr hoher Wert gegeben. Da im weiteren Programmablauf die Werte der Matrizenfelder die Funktion hatten, die Zeit anzugeben, die ein Kunde auf die Erledigung eines bestimmten Schaltergeschäftes zu warten hat, und da dem Kunden von den in Frage kommenden Feldern das mit dem geringsten Wert zugeordnet wurde, war damit sichergestellt, daß er nicht an Schaltern bedient wurde, die für die Erledigung seines Schaltergeschäftes nicht vorgesehen waren.

Die Nachbildung des Warteprozesses selbst erfolgte für jeden Kunden in folgenden sequentiellen Schritten: Zunächst wurden drei zwischen 0 und 1 gleichverteilte Zufallszahlen erzeugt. Mit Hilfe der ersten wurde eine zufällige Zwischenankunftszeit des Kunden bestimmt. Dann wurde diese Zwischenankunftszeit von jedem Wert der Schalter/Schaltergeschäfte-Matrix subtrahiert. Diese Subtraktion wurde vorgenommen, da die Summe der Bedienungszeiten für die Erledigung der Geschäfte der vor den Schaltern wartenden Kunden bis zur Ankunft des neuen Kunden um diese Zeit reduziert wird. Matrizenfelder, die nach dieser Subtraktion einen Wert kleiner als null annahmen, wurden gleich null gesetzt, da negative Wartezeiten nicht möglich sind. Mit Hilfe der zweiten Zufallszahl wurde dann ein Schaltergeschäft bestimmt. Da das Schaltergeschäft "Annahme von Zahlkarten und Postanweisungen" eine Sonderstellung einnahm, wurde unterschiedlich verfahren, je nachdem, ob es sich um dieses Schaltergeschäft handelte oder nicht. Handelte es sich nicht um dieses Schaltergeschäft, wurde für die dem zufällig bestimmten Schaltergeschäft zugeordnete Spalte der Matrix das Feld mit dem geringsten Wert ermittelt. Dieser Wert war mit der Wartezeit

des Kunden identisch.

Handelte es sich dagegen um das Schaltergeschäft "Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten", dann wurde zunächst sowohl die minimale Wartezeit bis zum Bedienungsbeginn für maschinelle als auch für manuelle Erledigung bestimmt. Den Modellannahmen nach sollte sich der Kunde mit diesem Schaltergeschäft an dem Schalter anstellen, an dem seine Wartezeit einschließlich seiner Bedienungszeit am geringsten war. Deshalb wurde mit Hilfe der dritten Zufallszahl sowohl eine Bedienungszeit aus der Bedienungszeitverteilung für manuelle als auch aus der für maschinelle Erledigung bestimmt und geprüft, bei welcher Art der Abfertigung des Kunden die Summe aus Warte- und Bedienungszeit geringer war.

Dann wurde dem Kunden das Matrizenfeld zugeordnet, für das die Summe den kleineren Wert annahm.

Damit war für jeden Kunden eine Wartezeit bestimmt.

Der letzte Schritt der Nachbildung des Warteprozesses bestand in der Ermittlung der Bedienungszeit für den jeweiligen Kunden mit Hilfe der dritten Zufallszahl. Um diese Bedienungszeit wurde, bevor die nächste Zwischenankunftszeit ermittelt wurde, die gesamte Zeile der Schalter/Schaltergeschäfte-Matrix, die dem Schalter mit der minimalen Wartezeit zugeordnet war, erhöht.

Die Wartezeiten wurden abgespeichert und nach Durchspielung der vorgegebenen n Kunden statistisch ausgewertet. Anschließend erfolgte der Ausdruck der Ergebnisse.

Dieses, in seinen Grundzügen beschriebene Computer-Programm zur Simulation von Wartesystemen ist allgemein zur Lösung folgender Probleme geeignet:

- 1) Es können bis zu 19 verschiedene Kundentypen vorhanden sein.

- 2) Die Zahl der Bedienungsstationen kann kleiner gleich 9 sein.

Sowohl die Zahl der Kundentypen als auch die Zahl der Bedienungsstationen kann ohne weiteres durch Erhöhung der Zahl der Spalten und Zeilen der Schalter/Schaltergeschäfte-Matrix vergrößert werden.

- 3) Die Bedienungsstationen können in beliebiger Weise spezialisiert sein, d. h., die Schaltergeschäfte können beliebig auf die Bedienungsstationen aufgeteilt werden.
- 4) Die Zwischenankunftszeiten der Kunden sind exponentiell verteilt.
- 5) Die Bedienungszeiten können beliebigen Verteilungsfunktionen gehorchen.
- 6) Die Bedienungszeiten können vom Kundentyp abhängig sein.

Eine Ausdehnung auf den Fall, daß die Bedienungszeiten für bestimmte Kundentypen von dem Grad der Spezialisierung der Schalter abhängen, ist leicht möglich.

- 7) Die Bedienungszeiten eines Kundentyps können von der Bedienungsstation abhängig sein.

Eine Ausdehnung dieses Spezialfalles auf mehrere Kundentypen ist ohne weiteres möglich.

- 8) Regeln für die Wahl der Bedienungsstationen durch die Kundentypen können spezifiziert werden.

Für die vorliegende Untersuchung wurde nur die durchschnittliche Wartezeit aller Kunden gemeinsam als Effizienzkriterium des Wartesystems verwendet. Durch eine leichte Modifikation des Programms können jedoch auch die durchschnittlichen Wartezeiten der verschiedenen Kundentypen ermittelt werden.

Für die verschiedenen Modellvarianten des vorliegenden

Wartesystems wurden insgesamt etwa 750 000 Kunden durchgespielt. Hierfür waren etwa drei Stunden Rechenzeit erforderlich.

F. Modellösung - Ergebnisse

I. Lösungen für verschiedene Bedienungszeitverteilungen - Vergleich der Ergebnisse

1. Exponentiell verteilte Bedienungszeiten

Um das Programm und den verwendeten Pseudozufallszahlen-Generator zu testen, wurde zunächst das Modell, in dem die empirisch beobachteten Bedienungszeiten durch eine einzige Exponentialverteilung beschrieben und identische parallele Schalter zugrundegelegt werden, durch Simulation gelöst.

Es wurden 50 000 Kunden durchgespielt. Es ergab sich für 6 Schalter, eine durchschnittliche Bedienungszeit von 0,7373 min und eine durchschnittliche Zwischenankunftszeit von 0,1610 min eine durchschnittliche Wartezeit von 0,2439 min. Der analytisch berechnete Erwartungswert für die durchschnittliche Wartezeit beträgt demgegenüber 0,2314 min. Als 95 % - Konfidenzintervall für die durch Simulation ermittelte durchschnittliche Wartezeit ergab sich ein Bereich von 0,2227 min bis 0,2651 min. Der Erwartungswert fiel also in das Schätzintervall. Das Programm konnte als richtig angesehen werden.

2. Empirisch verteilte Bedienungszeiten

Eine simultane Durchspielung von 50 000 Kunden bei Zugrundelegung der empirisch beobachteten Verteilung für die Bedienungszeiten ergab eine durchschnittliche Wartezeit von 0,2392 min. Dieser Wert wich also nicht sig-

nifikant von dem Wert für exponentiell verteilte Bedienstungszeiten ab. Daraus wurde geschlossen, daß es unerheblich ist, ob von den empirischen Bedienstungszeitverteilungen ausgegangen oder eine Exponentialverteilung für diese zur Ermittlung der durchschnittlichen Wartezeiten zugrundegelegt wird. Dieser Schluß war für die im nächsten Abschnitt behandelte analytische Näherungslösung von Bedeutung.

3. Hyperexponentiell verteilte Bedienstungszeiten

Sind die Schalter wie bei dem Modell für die Ist-Organisation nicht für alle Schaltergeschäfte verfügbar, dann kann nicht mit einer einzigen Bedienstungszeitverteilung für alle Schaltergeschäfte gemeinsam gerechnet werden, sondern es muß für jedes Schaltergeschäft gesondert eine Bedienstungszeitverteilung zugrundegelegt werden.

Beschreibt man jede Bedienstungszeitverteilung für jedes Schaltergeschäft durch eine Exponentialverteilung, so ergibt die Summe dieser Exponentialverteilungen als gemeinsame Bedienstungszeitverteilung nicht etwa wieder eine Exponentialverteilung, sondern eine hyperexponentielle Verteilung (vgl. S.47). Die hyperexponentielle Verteilung hat gegenüber der Exponentialverteilung eine erheblich höhere Varianz, im vorliegenden Fall statt 5350 1/100 min 11574 1/100 min .

Um zu prüfen, wie sich die Annahme einer hyperexponentiellen Verteilung auf die durchschnittlichen Wartezeiten auswirkt, wurden für diesen Fall ebenfalls 50 000 Kunden simultan durchgespielt. Es ergab sich eine durchschnittliche Wartezeit von 0,3050 min. Dieser Wert liegt signifikant höher (etwa 25 %) als der Wert für exponentiell verteilte Bedienstungszeiten.

Für die zweite Modell-Gruppe wurden deshalb die empirischen Bedienungszeiten zugrundegelegt (vgl. S. 48f).

II. Ergebnisse für die Ist-Organisation der Schalter

1. Vergleich der durch Simulation ermittelten mit den durch analytische Näherungslösung erhaltenen Ergebnissen

Für 4, 6 und 8 geöffnete Schalter wurden die bei der Ist-Organisation der Schalter entstehenden mittleren Wartezeiten durch Simulation für jeweils vier verschiedene Verkehrsdichten ermittelt. Diesen sind in Tabelle 8 (S. 104) die mit dem in Abschnitt E.II. entwickelten analytischen Näherungsverfahren erzielten Ergebnisse gegenübergestellt. Die unter der Annahme exponentiell verteilter Bedienungszeiten ermittelte Näherungslösung brauchte nicht korrigiert zu werden (vgl. S. 60), da es für die entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten unerheblich ist, ob eine exponentielle oder die empirische Verteilung für die Bedienungszeiten zugrundegelegt wird.

Um entscheiden zu können, ob die analytischen Näherungslösungen signifikant von den durch Simulation auf der Grundlage von Stichproben vom Umfang 5800 erzielten Ergebnissen für die durchschnittliche Wartezeit abweichen, muß der Faktor A (siehe S. 70, Formel 21), mit dem die Varianz der Stichprobenmittelpunkte bei Vorliegen von Autokorrelation multipliziert werden muß, bekannt sein. Dieser ist nur für eine Stichprobe vom Umfang 1000 für 6 Schalter und eine durchschnittliche Wartezeit von 88,61 1/100 min bestimmt worden. Er betrug in diesem Fall $A = 66,06$.

Tabelle 8 - Vergleich der durch Simulation erhaltenen Ergebnisse mit den durch die analytische Näherungslösung erzielten Ergebnissen für die Ist-Organisation für 4, 6 und 8 Schalter

Kunden pro 30 min	Schal- ter- zahl	analytische Näherungs- lösung (1/100 min)	durch Simula- tion erzielte Ergebnisse (1/100 min)	$\frac{s^*_t}{\sqrt{5799}}$ (1/100 min)
142,5 126,7 97,4 70,4	4	196,65 103,16 41,15 18,21	175,01 92,49 41,52 21,92	1,73 1,25 0,80 0,60
216,3 196,1 168,0 139,3	6	138,44 69,59 37,08 19,22	147,62 69,41 36,43 19,82	1,35 0,82 0,57 0,43
305,1 278,5 239,1 200,1	8	161,92 72,21 30,27 14,00	149,10 65,36 28,71 14,67	1,00 0,67 0,46 0,35

Dieser Faktor wird umso größer sein, je größer die durchschnittliche Wartezeit ist¹⁾. A wird also für geringere durchschnittliche Wartezeiten als 88,61 1/100 min vermutlich kleiner und für höhere durchschnittliche Wartezeiten als 88,61 1/100 min vermutlich größer sein als 66,06. Die in Tabelle 8 in der letzten Spalte angegebenen Werte für $s^*_t/\sqrt{n-1}$ müssen entsprechend mit einem Faktor multipliziert werden, der kleiner bzw. größer ist als $\sqrt{66,06} = 8,13$, um die Standardfehler

1) Vgl. Anmerkung 1, S. 75.

der Stichprobenwerte für die durchschnittliche Wartezeit zu erhalten. Einem 95 % - Konfidenzintervall für die durchschnittliche Wartezeit entsprechend müßte die Differenz zwischen den durch analytische Näherungslösung und durch Simulation erhaltenen Werten für Wartezeiten über 88,61 1/100 min also größer und für Wartezeiten unter 88,61 1/100 min also kleiner sein als $1,96 \cdot 8,13 \cdot s^*_t / \sqrt{n-1} = 16 \cdot s^*_t / \sqrt{n-1}$, wenn die analytische Näherungslösung signifikant von der Lösung durch Simulation abweiche. Tabelle 8 ist jedoch zu entnehmen, daß die Differenzen für Wartezeiten, die über 88,61 1/100 min liegen, für jeden Fall kleiner und die Differenzen für Wartezeiten, die unter 88,61 1/100 min liegen, für jeden Fall erheblich kleiner als $16 \cdot s^*_t / \sqrt{n-1}$ sind.

Hieraus konnte geschlossen werden, daß die Übereinstimmung so gut ist, daß die Kurven für die durchschnittliche Wartezeit für 2 - 9 geöffnete Schalter bei Ist-Organisation nicht durch Simulation bestimmt zu werden brauchen, sondern mit Hilfe des analytischen Näherungslösungs-Verfahrens ermittelt werden können.

Der folgenden Tabelle 9 ist zu entnehmen, auf welcher Zahl den Kunden durchschnittlich zur Verfügung stehender Schalter $\bar{c}$ (siehe Formel 12, S. 58) die analytischen Näherungslösungen für die Ist-Organisation für 2 - 9 geöffnete Schalter beruhen.

Die nach dem analytischen Näherungsverfahren ermittelten, bei der Ist-Organisation der Schalter entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten sind in Abbildung 14, S. 107 als Funktion der Zahl der pro 30 min eintreffenden Kunden und der Zahl der geöffneten Schalter dargestellt.

Tabelle 9 - Durchschnittlich den Kunden bei der Ist-Organisation zur Verfügung stehende Zahl geöffneten Schalter ($\bar{c}$)

Schalterzahl (c)	durchschnittlich den Kunden zur Verfügung stehende Schalterzahl ($\bar{c}$)
2	1,11
3	1,51
4	1,91
5	2,35
6	2,76
7	3,26
8	3,78
9	4,34

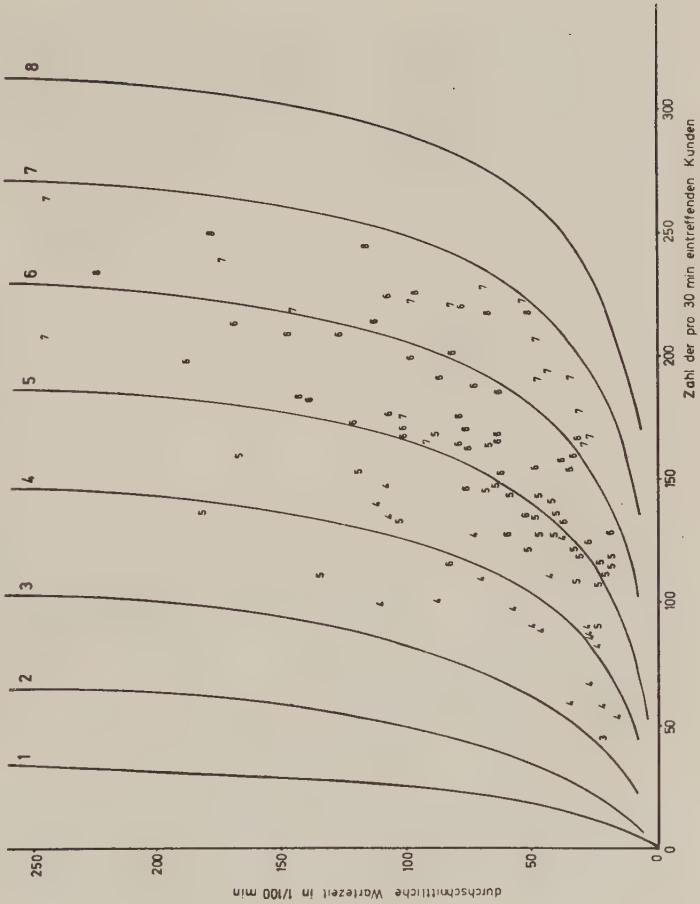
2. Überprüfung der Ergebnisse an den empirisch beobachteten Wartezeiten

Aus den Erhebungsformularen (siehe Abbildung 1, S. 15) lassen sich nicht nur die Zwischenankunftszeiten, die Bedienungszeiten und die Schaltergeschäfte, sondern auch die Wartezeiten der Kunden entnehmen.

Ein Vergleich der im wirklichen System aufgetretenen durchschnittlichen Wartezeiten bei verschiedener Verkehrsdichte und verschiedener Zahl besetzter Schalter mit den aus dem Modell bestimmten durchschnittlichen Wartezeiten bei entsprechender Verkehrsdichte und entsprechender Zahl geöffneten Schalter ermöglicht eine Überprüfung des Modells auf die Güte der Wiedergabe der wirklichen Verhältnisse.

In Abbildung 14 (S. 107) sind die modellmäßig bestimmten und die beobachteten Wartezeiten gegenübergestellt.

Abbildung 14 - Vergleich der modellmäßig bestimmten mit den beobachteten durchschnittlichen Wartezeiten für die Ist-Organisation bei verschiedenen Schalterzahlen



Bei einem Vergleich muß folgendes berücksichtigt werden:

1. Wegen der hohen Autokorrelation der Wartezeiten können die beobachteten durchschnittlichen Wartezeiten sehr stark um die modellmäßig ermittelten durchschnittlichen Wartezeiten streuen. So erstreckt sich z.B. ein 95 % - Konfidenzintervall für eine durchschnittliche Wartezeit von 88,61 1/100 min bei 6 geöffneten Schaltern für eine Stichprobe von 200 beobachteten Kunden nach den auf S. 78f. wiedergegebenen Ergebnissen über einen Bereich von

$$88,61 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{13084}{199} 66,06} \quad \text{bis}$$

$$88,61 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{13084}{199} 66,06} \quad ,$$

also über einen Bereich von 0 bis 217,4 1/100 min .

2. Da in der untersuchten Schalterstelle nicht jeder Schalter volle 30 min geöffnet war und aus den Erhebungsformularen nicht eindeutig hervorgeht, wann ein Schalterbeamter seinen Schalter geschlossen hat, ist in vielen Fällen die wirkliche Zahl geöffneter Schalter nur ungenau zu schätzen.

3. Bei der modellmäßigen Berechnung wurde angenommen, daß die Zusammensetzung der Schaltergeschäfte pro 30 min der durchschnittlichen Zusammensetzung in dem gesamten Beobachtungszeitraum gleich ist. In Wirklichkeit schwankte diese Zusammensetzung jedoch erheblich. Da die einzelnen Schaltergeschäfte unterschiedliche Bedienungszeiten erfordern und sich auch die Spezialisierung der Schalter bei unterschiedlichen Anteilen der Schaltergeschäfte auswirkt, müssen die beobachteten

durchschnittlichen Wartezeiten von den modellmäßig ermittelten abweichen. Diese Abweichung muß stärker in Richtung hoher Wartezeiten als in Richtung geringer Wartezeiten erfolgen, da eine Erhöhung der durchschnittlichen Bedienungszeit die durchschnittliche Wartezeit relativ stärker erhöht als eine relativ gleich starke Verringerung der durchschnittlichen Bedienungszeit die durchschnittliche Wartezeit senkt.

Vergleicht man unter Berücksichtigung dieser drei Punkte die beobachteten mit den aus dem Modell abgeleiteten durchschnittlichen Wartezeiten, so kann gefolgert werden, daß die wirklichen Verhältnisse durch das Modell bis zu 6 geöffneten Schaltern sehr gut wiedergegeben werden.

Für 7 und 8 geöffnete Schalter liegen die beobachteten durchschnittlichen Wartezeiten ausnahmslos über den modellmäßig ermittelten durchschnittlichen Wartezeiten. Das deutet darauf hin, daß die Modellannahme, die Kunden verhielten sich so, daß kein Schalter frei steht, wenn ein Kunde im System ist, der an dem freien Schalter bedient werden kann, für viele geöffnete Schalter für die Ist-Organisation weniger zutrifft als für wenige geöffnete Schalter. Bei Allzweckorganisation der Schalter ist jedoch zu vermuten, daß die Kunden auch bei 7 und mehr geöffneten Schaltern keinen Schalter leer stehen lassen, da ihnen eine Allzweckorganisation einen besseren Überblick über die verschiedenen Schalter und Wartelinien ermöglicht als die Ist-Organisation.

Insgesamt ergibt der Vergleich der beobachteten mit den aus dem Modell abgeleiteten Wartezeiten, daß die ermittelten Ergebnisse eine Untergrenze für die durchschnittlichen Wartezeiten bei der Ist-Organisation der Schalter bilden.

III. Ergebnisse für die Allzweckorganisation der Schalter

1. Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme- Maschine

Die Tabelle 10 (S. 111) und Abbildung 15 (S. 112) zu entnehmenden durchschnittlichen Wartezeiten für Allzweckorganisation der Schalter mit einer Zahlkartenannahme-Maschine (Modell II.2.) sind durch Simulation aus Stichproben vom Umfang $n = 5800$ ermittelt. Sie sind den bei der Ist-Organisation der Schalter¹⁾ entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten als Funktion der pro 30 min eintreffenden Kunden und der Zahl besetzter Schalter gegenübergestellt.

Eine manuelle Abfertigung der Kunden mit dem Schaltergeschäft "Annahme von Zahlkarten und Postanweisungen" erfordert etwa doppelt so hohe Bedienungszeiten wie eine maschinelle. Deshalb wurde der Zusammenhang zwischen Wartezeit und der Zahl der neben dem Maschinen-Schalter für manuelle Bedienung zur Verfügung stehenden Schalter untersucht.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 11 (S. 114) festgehalten. Sie beziehen sich nicht etwa nur auf die 18,94 % Zahlkartenkunden, sondern auf alle Kunden.

Für hohe Verkehrsdichte bei einer bestimmten Zahl geöffneter Schalter ist es hinsichtlich der entstehenden Wartezeiten günstiger, wenn das Geschäft "Annahme von Zahlkarten und Postanweisungen" bei 2 bis 5 geöffneten

1) Auch bei der Ist-Organisation der Schalter war eine Zahlkartenannahme-Maschine installiert.

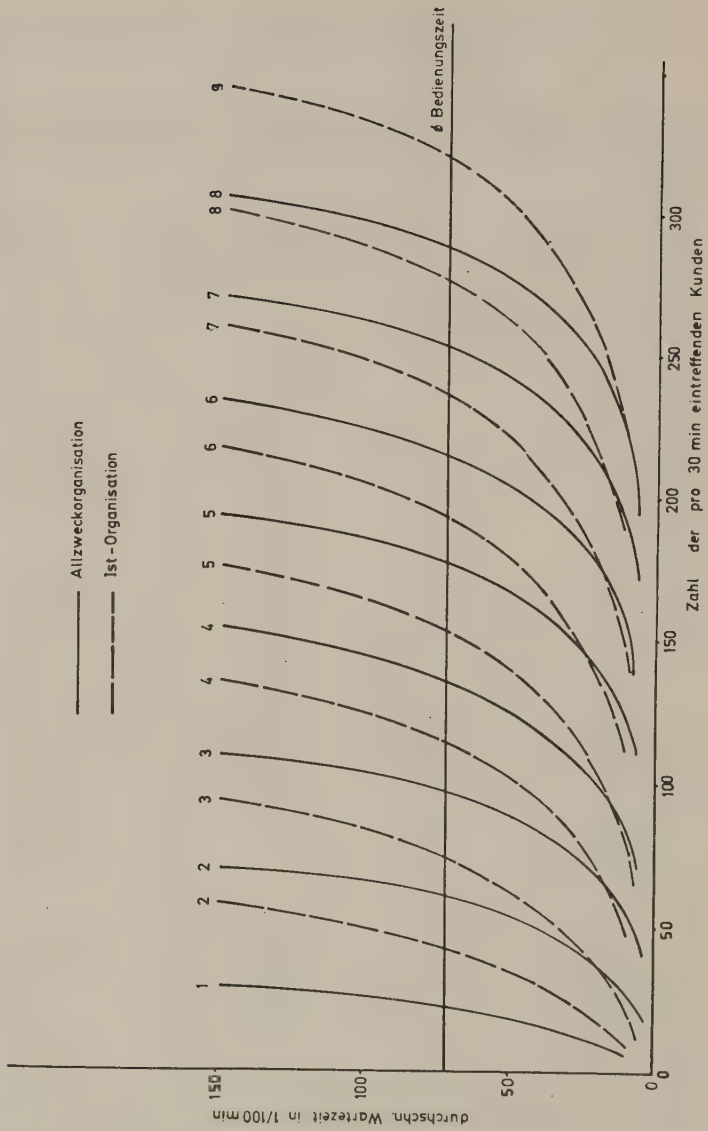
Tabelle 10 - Vergleich der bei Ist- und bei Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten

Kunden pro 30 min	Schalter- zahl	durchschnittl. Wartezeiten	
		bei Allzweckorga- nisation ¹⁾ (1/100 min)	bei Ist-Organi- sation ²⁾ (1/100 min)
69	2	149,8	301,7
56		65,3	131,6
41		25,1	62,4
20		4,9	20,2
104	3	108,3	237,6
86		45,1	105,4
61		12,5	43,5
30		2,3	13,0
143	4	(98,0)	202,0
127		47,8	104,6
97		15,8	40,7
70		5,1	18,0
186	5	105,0	218,8
175		72,8	137,0
159		40,9	80,6
156		35,1	73,8
110	6	8,4	21,9
223		96,6	179,6
216		81,2	137,3
201		43,5	85,5
175	7	(20,0)	43,9
139		8,0	19,1
258		91,2	135,2
248		65,6	98,2
230	8	33,5	60,7
205		17,8	34,3
172		8,6	17,0
308		171,2	181,5
297	8	(100,0)	121,6
268		37,8	56,0
220		10,9	20,7
214		(10,5)	18,4

1) Durch Simulation bestimmte Werte. In Klammern gestetzte Werte sind durch graphische Inter- oder Extrapolation aus Abbildung 15 (S. 112) ermittelt.

2) Durch analytische Näherung bestimmte Werte.

Abbildung 15 - Vergleich der bei Ist- und bei Allzweckorganisation mit einer Zahl-
kartenannahme-Maschine entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten



Schaltern nur an dem Schalter mit Zahlkartenannahme-Maschine bearbeitet wird, bei 6 bis 8 geöffneten Schaltern, wenn es außer an dem Maschinen-Schalter nur an einem weiteren Schalter auch manuell erledigt wird. Bei 6 bis 8 Schaltern reicht bei hoher Verkehrsdichte die Kapazität der Annahme-Maschine nicht aus, um alle Zahlkarten-Kunden abzufertigen.

Bei geringer Verkehrsdichte ist es dagegen günstiger, wenn das Geschäft "Zahlkartenannahme" auch an allen Schaltern manuell erledigt wird.

Daraus ist zu schließen, daß bei hoher Verkehrsdichte ein "Verstopfungseffekt" der Schalter durch Zahlkarten-Kunden eintritt: es kann nur ein geringer Teil der Zahlkarten-Kunden maschinell bedient werden, ein großer Teil dagegen blockiert durch die bei manueller Abfertigung überdurchschnittlich hohen Bedienungszeiten (1,0826 min) die übrigen Schalter.

Bei niedriger Verkehrsdichte kann dadurch, daß Zahlkarten-Kunden an allen Schaltern auch manuell bedient werden, die durchschnittliche Wartezeit auf weniger als 50 % reduziert werden.

Bei dem später folgenden Vergleich von Allzweck- und Ist-Organisation der Schalter ist für Allzweckorganisation angenommen worden, daß Zahlkarten-Kunden an der jeweils günstigsten Zahl von Schaltern auch manuell bedient werden.

Wie Abbildung 15 (S. 112) und Tabelle 10 (S. 111) zeigen, ist das Ausmaß der Reduzierung der durchschnittlichen Wartezeiten durch Einführung der Allzweckorganisation unterschiedlich bei verschiedener Zahl geöffneter Schalter und verschiedener Verkehrsdichte. Für einen geöffneten Schalter ergibt sich naturgemäß kein Unterschied, da es sich nur um einen Allzweckschalter handeln kann.

Tabelle 11 - Durchschnittliche Wartezeiten bei verschiedener Zahl von für die manuelle Abfertigung der Zahlkarten-Kunden zur Verfügung stehenden Schaltern

Kunden pro 30 min	Schalter- zahl	durchschnittliche Wartezeiten ¹⁾ in 1/100 min Zahl der für die manuelle Abfertigung zur Verfügung stehenden Schalter							
		7	6	5	4	3	2	1	0
308	8	(220,0)				180,0		171,2	
297	8	129,3						(100,0)	
268	8	37,8				39,2		41,5	124,1
220	8	10,9						(18,0)	
214	8	(10,5)				12,0		17,6	49,9
258	7	-	117,2			102,0		91,2	152,2
248	7	-	(66,0)			65,6		66,1	
230	7	-	33,5					(41,0)	
205	7	-	17,8			19,5		24,7	
172	7	-	8,6					(19,0)	
223	6	-	-	(145,0)		135,0		96,6	107,9
216	6	-	-	81,2				66,1	(85,0)
201	6	-	-	(46,0)		43,5		45,1	60,5
175	6	-	-	(20,0)		20,3		23,5	36,1
139	6	-	-	8,0					(21,0)
186	5	-	-	-	(150,0)		125,1	126,2	105,0
175	5	-	-	-	79,5		74,1	73,2	72,8
159	5	-	-	-	40,9				(49,0)
156	5	-	-	-	(35,5)		35,2	35,1	45,6
110	5	-	-	-	8,4				(21,0)
143	4	-	-	-	-	111,6	109,1	107,2	(98,0)
127	4	-	-	-	-	47,8	50,0	49,9	56,3
97	4	-	-	-	-	15,8	16,1	18,6	29,1
71	4	-	-	-	-	5,5	5,1	6,6	13,7
104	3	-	-	-	-	-	133,8		108,3
86	3	-	-	-	-	-	45,3		45,1
61	3	-	-	-	-	-	12,5		20,5
30	3	-	-	-	-	-	2,3		8,2
69	2	-	-	-	-	-	-	181,1	149,8
56	2	-	-	-	-	-	-	67,8	65,3
41	2	-	-	-	-	-	-	25,1	26,3
20	2	-	-	-	-	-	-	4,9	8,1

1) Nicht in Klammern gesetzte Werte sind durch Simulation, in Klammern gesetzte Werte durch graphische Inter- oder Extrapolation ermittelt.

Die relative Wartezeitersparnis ist umso größer, je geringer die Verkehrsdichte bei einer bestimmten Zahl geöffneter Schalter ist. Bei 7 und 8 besetzten Schaltern ist die Reduzierung der durchschnittlichen Wartezeiten geringer als bei weniger geöffneten Schaltern. Das ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß der Engpaß, den die eine Zahlkartenannahme-Maschine bildet, sich so stark auswirkt, daß er den Effekt der Reduzierung der Wartezeiten durch Allzweckorganisation demgegenüber relativ klein werden läßt.

2. Allzweckorganisation ohne Zahlkartenannahme-Maschine

Um den Effekt der Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine auf die durchschnittlichen Wartezeiten angeben zu können, müssen einmal die Wartezeiten, die entstehen, wenn keine Maschine installiert ist, zum anderen die Wartezeiten, die bei Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine bei gleicher Schalterorganisation entstehen, ermittelt werden.

Die Wartezeiten, die entstehen, wenn keine Maschine eingesetzt wird, sind für vollständige Allzweckorganisation der Schalter ermittelt worden¹⁾. Das hat den Vorteil, daß von identischen parallelen Schaltern ausgegangen werden konnte. Damit war eine analytische Lösung möglich.

Die Wartezeiten, die entstehen, wenn eine Zahlkartenannahme-Maschine eingesetzt wird, sind dagegen für eine Schalterorganisation bestimmt worden, bei der die Vermittlung von Gesprächen wegen der erforderlichen technischen Einrichtungen nur an einem Schalter erledigt wird.

1) Es ist also angenommen worden, daß auch das Geschäft "Vermittlung von Gesprächen" an allen Schaltern erledigt werden kann.

In diesem System entstehen zwar höhere Wartezeiten, als wenn wie für das System ohne Zahlkartenannahme-Maschine angenommen würde, daß auch dieses Geschäft an allen Schaltern erledigt wird. Wegen der geringen Zahl von Kunden, denen Telefongespräche vermittelt werden müssen (4,09 %), und wegen der relativ geringen Bedienungszeit für diese Kunden (0,5136 min) kann jedoch davon ausgegangen werden, daß die für das modifizierte Allzwecksystem mit einer Zahlkartenannahme-Maschine bestimmten Wartezeiten nur geringfügig über den durchschnittlichen Wartezeiten für ein vollständiges Allzwecksystem mit einer Zahlkartenannahme-Maschine liegen. Die durch Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine erzielbare Wartezeitersparnis wird somit geringfügig höher sein als ermittelt.

Die bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten sind in Tabelle 12 (S. 117) und in Abbildung 16 (S. 118) gegenübergestellt.

Tabelle 12 und Abbildung 16 zeigen, daß die durchschnittlichen Wartezeiten durch die Installation einer Maschine umso stärker reduziert werden, je größer die Verkehrsdichte bei einer bestimmten Zahl geöffneter Schalter ist und je mehr Schalter geöffnet sind.

3. Allzweckorganisation mit zwei und mehr Zahlkartenannahme-Maschinen

Durch Installation weiterer Zahlkartenannahme-Maschinen könnte die durchschnittliche Wartezeit weiter reduziert werden, wenn auch in zunehmend geringerem Ausmaß. Tabelle 13 (S. 119) zeigt diesen Zusammenhang für 4, 6 und 8 Schalter für jeweils nur eine bestimmte Zahl pro 30 min eintreffender Kunden. Wartezeitkurven

Tabelle 12 - Vergleich der durchschnittlichen Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine

Kunden pro 30 min	Schalter- zahl	durchschnittliche Wartezeiten	
		1 Zahlkartenan- nahme-Masch. ¹⁾ (1/100 min)	0 Zahlkartenan- nahme-Masch. ²⁾ (1/100 min)
69	2	149,8	862,5
56		65,3	125,0
41		25,1	39,5
20		4,9	6,9
104	3	108,3	644,2
86		45,1	91,2
61		12,5	21,8
30		2,3	2,4
143	4	(98,0)	1967,6
127		47,8	127,9
97		15,8	24,3
70		5,1	6,4
186	5	105,0	
175		72,8	493,4
159		40,9	99,8
156		35,1	82,6
110	6	8,4	10,5
223		96,6	
216		81,2	4238,1
201		43,5	154,0
175	7	(20,0)	38,3
139		8,0	9,6
258		91,2	
248		65,6	597,2
230	8	33,5	104,3
205		17,8	31,8
172		8,6	10,0
308		171,2	
297	8	(100,0)	
268		37,8	112,9
220		10,9	16,5
214		(10,5)	13,6

1) Durch Simulation bestimmte Werte. In Klammern gesetzte Werte sind durch graphische Inter- oder Extrapolation aus Abbildung 15 (S. 112) ermittelt

2) Analytisch aus Modell I.1. bestimmte Werte.

Abbildung 16 - Vergleich der durchschnittlichen Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine

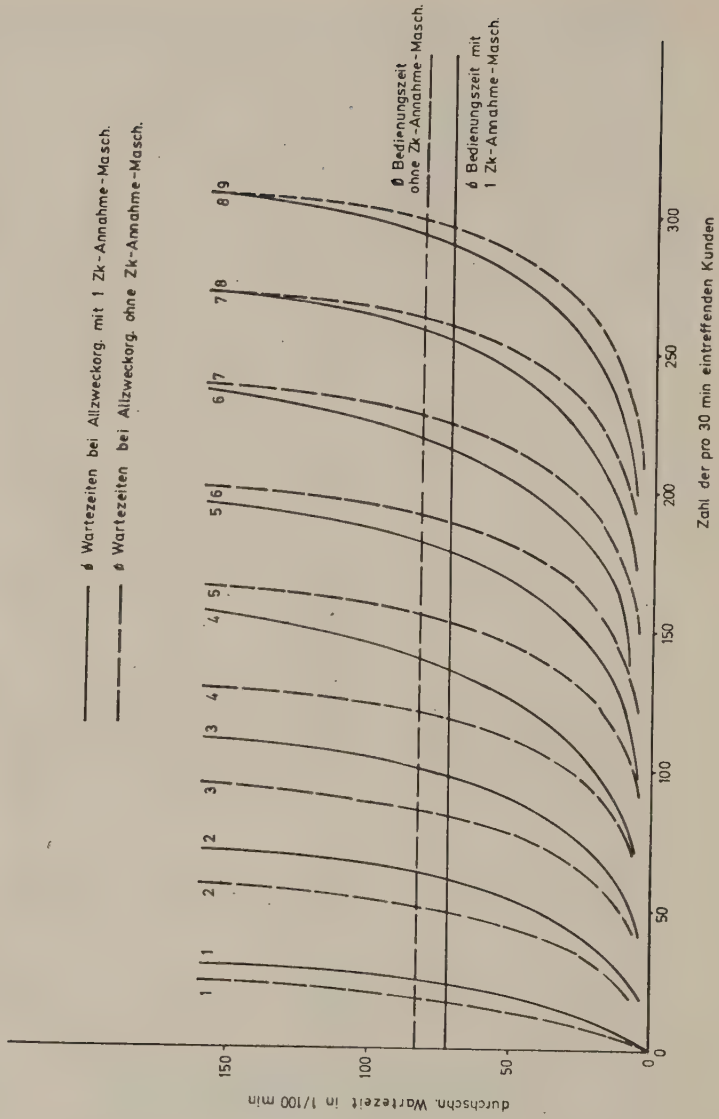


Tabelle 13 - Durchschnittliche Wartezeiten bei verschiedener Zahl von Zahlkarteannahme-Maschinen

Funden pro 30 min	Schalter- zahl	durchschnittliche Wartezeiten ¹⁾ 1/100 min bei											
		0 Masch.		1 Masch.		2 Masch.		3 Masch.		4 Masch.		6 Masch.	
		abs.	vH	abs.	vH	abs.	vH	abs.	vH	abs.	vH	abs.	vH
133	4	154	237	65	100	53	82						
201	6	128	272	47	100	37	79	49	75	32	68		
291	8	390	481	81	100	57	70			42	52	30	48

1) Durch Simulation bestimmte Werte.

wie für die anderen Schalterorganisationen wurden nicht ermittelt.

Die durchschnittlichen Wartezeiten in Tabelle 13 sind aus Stichproben vom Umfang 5800 bestimmt worden. Die Ergebnisse zeigen, daß die durchschnittlichen Wartezeiten durch Installation zusätzlicher Zahlkartenannahme-Maschinen umso stärker reduziert werden können, je größer die Schalterstelle eines Postamtes ist.

Die für Allzweckorganisation der Schalter modellmäßig ermittelten Ergebnisse konnten nicht wie die für die Ist-Organisation ermittelten an empirisch beobachteten Wartezeiten überprüft werden.

Für die Ergebnisse für die Ist-Organisation konnte

festgestellt werden¹⁾, daß sie insbesondere wegen der sich ändernden Zusammensetzung der Schaltergeschäfte und der Unübersichtlichkeit der Ist-Organisation für die Kunden eine Untergrenze für die wirklich zu erwartenden Kundenwartezeiten bilden.

Da für Allzweckorganisation der Schalter diese beiden Gründe im wesentlichen entfallen, werden die für diese ermittelten Ergebnisse vermutlich noch besser mit den in den Schalterstellen der Postämter bei Allzweckorganisation zu erwartenden Wartezeiten übereinstimmen als die für die Ist-Organisation ermittelten.

Das bedeutet, daß die durch Allzweckorganisation erzielbare Reduzierung der Wartezeiten sowohl absolut als auch relativ größer sein wird als den Modellannahmen entsprechend ermittelt.

IV. Bestimmung der optimalen Zahl besetzter Schalter

1. Bestimmung nach Kriterium 1: durchschnittliche Wartezeit kleiner gleich durchschnittliche Bedienungszeit

Die Zahl zu besetzender Schalter bei bestimmter Zahl pro 30 min eintreffender Kunden soll entsprechend dem Ziel der Untersuchung so bestimmt werden, daß die bei der Abfertigung der Kunden entstehenden Kosten - diejenigen der Wartezeit der Kunden und diejenigen der Dienstzeit der Schalterbeamten - minimiert werden.

Eine Minimierung dieser Kosten setzt jedoch voraus, daß auch die Wartezeit der Kunden objektiv bewertet

1) Siehe S. 106ff.

werden kann. Dies ist für das vorliegende Problem nicht der Fall. Deshalb geht z.B. B. A. ROSENQUIST, Abteilungschef bei der Generalpostdirektion von Schweden, davon aus, daß das Qualitätsniveau des Schalterdienstes notwendigerweise auf subjektive Weise bestimmt werden muß¹⁾: "Es hat sich nichtsdestoweniger als angezeigt erwiesen, als allgemeines Ziel das Qualitätsniveau festzulegen, bei dem die durchschnittliche Wartezeit möglichst genau der durchschnittlichen Bedienungszeit entspricht, ohne diese jedoch zu überschreiten. Bei einem nach diesem Grundsatz organisierten Dienst ist die Gefahr, daß die Benutzer lange warten müssen - was zur Bestimmung der Leistungsfähigkeit des Dienstes ein wichtiges Kriterium darstellt - bedeutend abgeschwächt." Nach diesem Kriterium festgesetzte Schalteröffnungszeiten haben zudem den Vorteil, daß die für den Kunden entstehende Wartezeit unabhängig von der Zahl geöffneter Schalter ist²⁾.

Die nach diesem ersten Kriterium zu besetzende Schalterzahl bei bestimmter Zahl pro 30 min eintreffender Kunden ist aus Abbildung 15 (S. 112) bzw. Abbildung 16 (S. 118) leicht graphisch zu ermitteln:

Die Schnittpunkte der Kurven der durchschnittlichen Wartezeit mit der Kurve der durchschnittlichen Bedienungszeit geben die Zahlen pro 30 min eintreffender Kunden an, bei deren Überschreitung ein zusätzlicher Schalter geöffnet werden muß.

1) ROSENQUIST, B. A.: Die Organisation des Schalterdienstes der Postämter. In: Union Postale (1964). S. 199AL.

2) Dies gilt nur approximativ, da bei gleicher durchschnittlicher Wartezeit, aber unterschiedlicher Zahl geöffneter Schalter eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeit dafür, überhaupt warten zu müssen, besteht.

Die als Parallele zur Abszisse dargestellte durchschnittliche Bedienungszeit ist bei Einsatz einer Zahlkartenannahme-Maschine geringer, als wenn keine Zahlkartenannahme-Maschine eingesetzt wird. Entsprechend kann die durchschnittliche Kundenwartezeit, wenn keine Zahlkartenannahme-Maschine eingesetzt wird, einen höheren Wert annehmen.

Die nach diesem ersten Kriterium bei bestimmter Zahl pro 30 min eintreffender Kunden zu besetzende Schalterzahl ist für Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und für die Ist-Organisation der Schalter in Tabelle 14 (S. 126) dargestellt.

2. Bestimmung nach Kriterium 2: Minimierung der Zeit pro Abfertigung eines Kunden

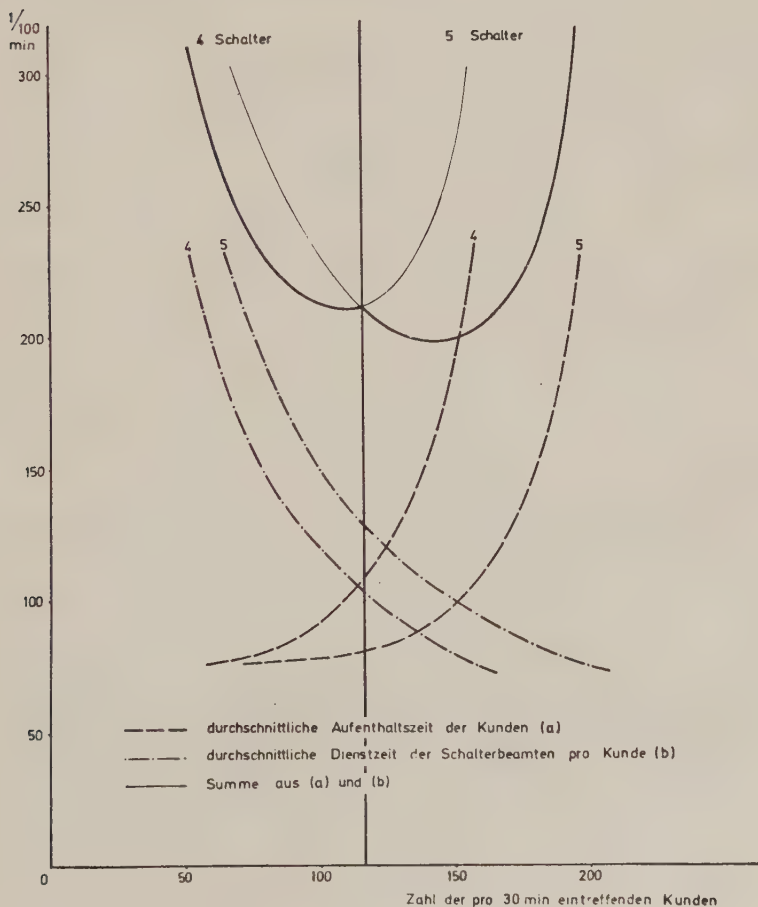
Da eine Bestimmung der Schalteröffnungszeiten nach Kriterium 1 nach subjektiven Gesichtspunkten erfolgt, können nach Kriterium 1 bestimmte Schalteröffnungszeiten nicht als optimal angesehen werden.

Die Zahl zu besetzender Schalter wurde deshalb außerdem aufgrund folgenden weiteren Kriteriums bestimmt: Es sollen so viele Schalter geöffnet sein, daß für jede vorgegebene Anzahl eintreffender Kunden die Summe aus bewerteter Aufenthaltszeit der Kunden in der Schalterstelle und bewerteter Dienstzeit der Schalterbeamten ein Minimum wird. Die durchschnittliche Aufenthaltszeit der Kunden setzt sich zusammen aus durchschnittlicher Wartezeit und durchschnittlicher Bedienungszeit. Die Dienstzeit der Schalterbeamten setzt sich zusammen aus Bedienungszeit und Leerzeit. Die Leerzeit der Schalterbeamten ist gleich dem Produkt aus der Zeit, die sie durchschnitt-

lich auf den Beginn der Bedienung eines Kunden warten, und der Zahl der Kunden.

In Abbildung 17 ist für 4 und für 5 geöffnete Schalter die durchschnittliche Aufenthaltszeit der Kunden (gestrichelt) und die durchschnittliche Dienstzeit der

Abbildung 17 - Ermittlung der Zeit pro Abfertigung eines Kunden



Schalterbeamten pro Kunde (gestrichelt - punktiert) als Funktion der Verkehrsdichte für Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine dargestellt.

Die durchschnittliche Dienstzeit der Schalterbeamten pro Kunde ist leicht zu ermitteln als Quotient aus der Schalteröffnungszeit und der Zahl der während dieser Zeit eintreffenden Kunden.

Die Kurve der Summe aus durchschnittlicher Aufenthaltszeit der Kunden und durchschnittlicher Dienstzeit pro Kunde ist Abbildung 17 (S. 123) ebenfalls für 4 und für 5 besetzte Schalter zu entnehmen.

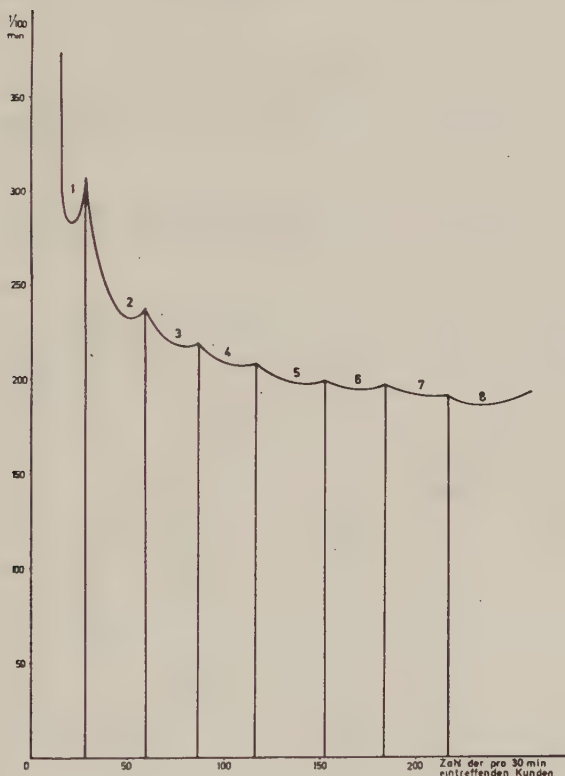
Ordnet man den Wartezeiten den gleichen Wert wie den Dienstzeiten der Schalterbeamten zu, ist diese Kurve als Kurve der durchschnittlichen Kosten pro Abfertigung eines Kunden interpretierbar.

Abbildung 17 zeigt, daß von einer Verkehrsdichte von 119 Kunden pro 30 min an die Durchschnittskosten bei Besetzung von 5 Schaltern geringer sind als bei Besetzung von 4 Schaltern. Das bedeutet, daß die stark durchgezogene Kurve die Kurve der minimalen Durchschnittskosten pro Abfertigung eines Kunden ist.

In Abbildung 18 (S. 125) ist die gesamte Kurve der minimalen Durchschnittskosten, wie entsprechend Abbildung 17 (S. 123) ermittelt, für 1 bis 8 geöffnete Schalter für Allzweckorganisation der Schalter mit einer Zahlkartenannahme-Maschine (Modell II.2.) dargestellt. Der Abbildung sind die entsprechend dem dargestellten Kriterium optimalen Zahlenöffneter Schalter bei bestimmten Verkehrsdichten zu entnehmen.

Die Abbildung zeigt außerdem, daß die Durchschnittskosten pro Abfertigung eines Kunden umso geringer sind, je mehr Kunden eintreffen, je größer also die Schalterstelle ist.

Abbildung 18 - Durchschnittskostenkurve pro Abfertigung eines Kunden für 1 bis 8 geöffnete Schalter



Die Kurve der durchschnittlichen Aufenthaltszeit der Kunden und damit auch die Kurve der minimalen Durchschnittskosten würde sich verschieben, wenn man der Wartezeit der Kunden einen anderen Wert zuordnete als der Dienstzeit der Schalterbeamten. Entsprechend würde sich die optimale Zahl bei bestimmter Verkehrsdichte

zu besetzender Schalter ändern. Für jeden Wert, der der Wartezeit zugeordnet werden kann, kann jedoch entschieden werden, welche Zahl geöffneter Schalter optimal ist.

Die in Tabelle 14 wiedergegebene Schalterzahl, die nach Kriterium 2 zur Minimierung der Kosten der Abfertigung der Kunden bei verschiedener Organisation der

Tabelle 14 - Schalteröffnungszahlen bei verschiedener Organisation der Schalter nach Kriterium 1 und Kriterium 2

zu eröffnende Schalterzahl	pro 30 min eintreffende Kunden	
	Kriterium 1	Kriterium 2
a. Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-M.		
1	1 - 21	1 - 25
2	22 - 61	26 - 57
3	62 - 91	58 - 87
4	92 - 135	88 - 119
5	136 - 177	120 - 152
6	178 - 213	153 - 184
7	214 - 253	185 - 219
8	254 - 288	220 -
b. Allzweckorganisation ohne Zahlkartenannahme-Masch.		
1	1 - 17	1 - 22
2	18 - 51	23 - 49
3	52 - 85	50 - 78
4	86 - 120	79 - 105
5	121 - 156	106 - 135
6	157 - 192	136 - 165
7	193 - 227	166 - 194
8	228 - 263	195 - 224
9	264 - 298	225 -
c. Ist-Organisation		
1	1 - 21	1 - 28
2	22 - 44	29 - 49
3	45 - 75	50 - 71
4	76 - 116	72 - 103
5	117 - 155	104 - 133
6	156 - 195	134 - 164
7	196 - 237	165 - 195
8	238 - 277	196 - 228
9	278 - 321	229 -

Schalter besetzt werden muß, ist unter der Annahme der Gleichbewertung der Wartezeit der Kunden und der Dienstzeit der Schalterbeamten ermittelt.

V. Vergleich der Warte- und Schalteröffnungszeiten bei verschiedener Schalterorganisation

1. Für den Vergleich zugrundegelegte Verteilung der Kundenankünfte pro 30 min

Im vorigen Abschnitt wurde die zur Minimierung der Abfertigungskosten erforderliche Zahl bei verschiedener Verkehrsdichte zu besetzender Schalter für verschiedene Schalterorganisation bestimmt. Nun sollen die in einem größeren Zeitraum als einer halben Stunde entstehenden - in Wartezeiten der Kunden und Dienstzeiten der Schalterbeamten ausgedrückten - Kosten für verschiedene Schalterorganisation miteinander verglichen werden.

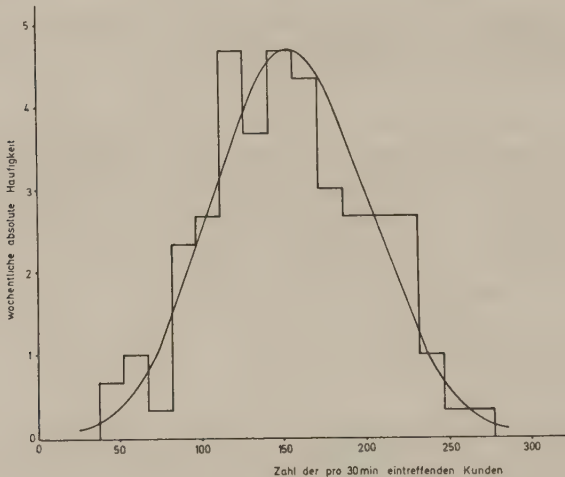
Um eine quantitative Aussage über diese machen zu können und um die durch Einführung der Allzweckorganisation bzw. der Zahlkartenannahme-Maschine erzielbare Reduzierung der Warte- und Schalteröffnungszeiten absolut und relativ angeben zu können, könnten die im Untersuchungszeitraum beobachteten Kundenankünfte pro 30 min zugrundegelegt werden. So wurde jedoch nicht vorgegangen, da die beobachtete Verteilung der pro 30 min eingetroffenen Kunden aufgrund des relativ kurzen Untersuchungszeitraumes starken Zufallsschwankungen unterliegen könnte.

Für die Verteilung der Kundenankünfte wurde stattdessen eine Normalverteilung mit dem empirisch beobachteten Mittelwert von 155 Kunden pro 30 min und der

beobachteten Standardabweichung von 47,3 Kunden angenommen (vgl. Tabelle 1, S. 19).

Die empirische Verteilung der Kundenankünfte ist der Normalverteilung in Abbildung 19 gegenübergestellt. Wie man sieht, ist die Anpassung recht gut.

Abbildung 19 - Verteilung der Kundenankünfte pro 30 min



Die Häufigkeitsverteilung der Zahl der Kundenankünfte pro 30 min entsprechend der Normalverteilung ist außerdem den ersten beiden Spalten der Tabelle 15 (S. 130) zu entnehmen.

2. Vergleich der Wartezeiten bei gleicher Zahl geöff- netter Schalter

Ein Vergleich der verschiedenen Schalterorganisationen, der auf die im definierten Sinne entstehenden Kosten der Abfertigung der Kunden abstellt, muß grundsätzlich von den ermittelten optimalen Schalteröffnungszahlen ausgehen. Ein solcher Vergleich ermöglicht es damit nicht, den Effekt einer Umorganisation der Schalter auf die durchschnittlichen Wartezeiten isoliert zu ermitteln, also die Frage zu beantworten, um wieviel die durchschnittliche Wartezeit durch günstigere Verteilung der Schaltergeschäfte auf die Schalter und durch Installation von Zahlkartenannahme-Maschinen reduziert werden kann.

Dies kann nur geschehen, wenn von gleichen Schalterbesetzungszahlen ausgegangen wird. Selbst wenn das geschieht, gewinnt man unterschiedliche Ergebnisse, je nachdem, welche Schalteröffnungszahlen man zugrundelegt. Aus Gründen der Beschränkung werden im folgenden die Schalterorganisationen für nach Kriterium 1 und 2 bei Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine zu eröffnende Schalterzahl verglichen.

Die bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und die bei der Ist-Organisation der Schalter entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten sind, wenn die Schalter nach Kriterium 1 bzw. 2 bei Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine besetzt werden, Tabelle 15 (S. 130) bzw. Tabelle 16 (S. 131) zu entnehmen.

Aus diesen Tabellen läßt sich errechnen, wie lange die in der untersuchten Woche beobachteten 17156 Kunden bei verschiedener Organisation der Schalter warten müssen. Diese Wartezeiten sind in Tabelle 17 (S. 132) wiedergegeben.

Tabelle 15 - Durchschnittliche Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter, wenn die Zahl der zu eröffnenden Schalter nach Kriterium 1 für Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine bestimmt wird¹⁾

pro 30 min eintreffende Kunden	wöchentliche Häufigkeit	Schalterzahl	durchschnittliche Wartezeit (1/100 min) bei		
			Allzweckorg. mit einer Zahlkartenannahme-Masch.	Allzweckorg. ohne Zahlkartenannahme-Maschine	Ist-Organisation
25	0,12	2	8	12	27
30	0,13		12	18	36
35	0,20		18	26	46
40	0,25		24	36	59
45	0,31		31	47	75
50	0,40		40	74	98
55	0,51		52	115	123
60	0,63	3	70	184	160
65	0,77		16	25	50
70	0,93		21	32	60
75	1,12		27	42	71
80	1,33		34	56	83
85	1,58		42	80	98
90	1,82		51	114	120
95	2,08	4	64	192	150
100	2,39		19	29	44
105	2,69		23	36	51
110	3,07		28	46	59
115	3,28		34	59	70
120	3,57		41	80	82
125	3,83		49	110	97
130	4,05	5	59	163	117
135	4,28		70	271	141
140	4,45		18	38	47
145	4,57		22	47	54
150	4,65		26	61	62
155	4,66		31	78	72
160	4,65		38	105	83
165	4,57	6	45	152	97
170	4,45		54	242	115
175	4,28		65	493	138
180	4,05		23	48	49
185	3,83		28	60	55
190	3,57		33	75	63
195	3,28		38	99	71
200	3,07	7	45	143	82
205	2,69		53	218	95
210	2,39		64	408	111
215	2,08		21	48	43
220	1,82		24	59	48
225	1,58		28	74	53
230	1,33		33	95	60
235	1,12	8	39	130	67
240	0,93		46	199	76
245	0,77		54	347	88
250	0,63		64	1014	102
255	0,51		24	58	42
260	0,40		28	71	47
265	0,31		33	90	52
270	0,25		38	126	58
275	0,20		44	182	66
280	0,13		52	301	75
285	0,12		62	720	86

1) Kriterium 1: durchschnittliche Wartezeit kleiner gleich durchschnittliche Bedienungszeit.

Tabelle 16 - Durchschnittliche Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter, wenn die Zahl der zu eröffnenden Schalter nach Kriterium 2 für Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine bestimmt wird¹⁾

pro 30 min eintreffende Kunden	wöchentliche Häufigkeit	Schalterzahl	durchschnittliche Wartezeit (1/100 min) bei		
			Allzweckorg. mit einer Zahlkartenannahme-Maschine	Allzweckorg. ohne Zahlkartenannahme-Maschine	Ist-Organisation
25	0,12	1	95	195	95
30	0,15		12	18	36
35	0,20		18	26	46
40	0,25		24	36	59
45	0,31	2	31	47	75
50	0,40		40	74	98
55	0,51		52	115	123
60	0,63		12	19	43
65	0,77		16	25	50
70	0,93		21	32	60
75	1,12	3	27	42	71
80	1,35		34	56	83
85	1,58		42	80	98
90	1,82		12	18	32
95	2,08		15	23	38
100	2,39		19	29	44
105	2,69	4	23	36	51
110	3,07		28	46	59
115	3,28		34	59	70
120	3,57		9	16	28
125	3,83		11	20	32
130	4,05		13	25	36
135	4,28	5	15	31	41
140	4,45		18	38	47
145	4,57		22	47	54
150	4,65		26	61	62
155	4,66		9	18	28
160	4,65		11	21	31
165	4,57		14	26	34
170	4,45	6	17	31	38
175	4,28		20	38	43
180	4,05		23	48	49
185	3,83		11	16	22
190	3,57		12	19	25
195	3,28		13	22	28
200	3,07	7	15	27	31
205	2,69		17	32	34
210	2,39		19	39	38
215	2,08		21	48	43
220	1,82		9	17	21
225	1,58		11	20	23
230	1,35		12	23	25
235	1,12		14	27	28
240	0,93		16	32	31
245	0,77		18	39	34
250	0,63	8	21	47	37
255	0,51		24	58	42
260	0,40		28	71	47
265	0,31		33	90	52
270	0,25		38	126	58
275	0,20		44	182	66
280	0,13		52	301	75
285	0,12		62	720	86

1) Kriterium 2: Minimierung der Zeit pro Abfertigung eines Kunden.

Tabelle 17 - Kundenwartezeiten und Schalteröffnungszeiten pro Woche bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter für die bei Allzweckorganisation der Schalter mit einer Zahlkartenannahme-Maschine nach Kriterium 1 und 2 bei bestimmter Verkehrsdichte zu eröffnenden Schalter

Schalterorganisation	Kriterium	Wartezeit bis zum Bedienungsbeginn + Bedienungszeit = Kundenwartezeit (Stunden)	Schalteröffnungszeit (Stunden)	Summe aus Kundenwartezeit und Schalteröffnungszeit (Stunden)
Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine	1	$112+203,5 = 315,5$	273,5	589,0
	2	$50+203,5 = 253,5$	308,5	562,0
Allzweckorganisation ohne Zahlkartenannahme-Maschine	1	$411+237,5 = 648,5$	273,5	922,0
	2	$102+237,5 = 349,5$	308,5	658,0
Ist-Organisation	1	$229+203,5 = 432,5$	273,5	706,0
	2	$113+203,5 = 316,5$	308,5	625,0

Quelle: Tabelle 15 (S. 130) und Tabelle 16 (S. 131)

- 1) Kriterium 1: durchschnittliche Wartezeit $\leq$ durchschnittliche Bedienungszeit
 Kriterium 2: Minimierung der Zeit pro Abfertigung eines Kunden

Nach Tabelle 17 kann die Wartezeit der Kunden für die untersuchte Schalterstelle durch Allzweckorganisation der Schalter gegenüber der Ist-Organisation bei 273,5 Stunden Schalteröffnungszeit (Kriterium 1) um 117 Stunden auf 48,9 % und bei 308,5 Stunden Schalteröffnungs-

zeit (Kriterium 2) um 63 Stunden auf 44,2 % reduziert werden.

Die durch Allzweckorganisation erzielbare Wartezeiterparnis der Kunden ist umso größer, je größer die Schalteröffnungszeit ist, da sich die Vorteile der Allzweckorganisation bei bestimmten Schalteröffnungszahlen bei geringer Verkehrsdichte stärker als bei hoher Verkehrsdichte auswirken.

Durch Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine kann bei Allzweckorganisation die Wartezeit bei 273,5 Stunden Schalteröffnungszeit (Kriterium 1) um 299 Stunden auf 27,3 % und bei 308,5 Stunden Schalteröffnungszeit (Kriterium 2) um 52 Stunden auf 49,0 % reduziert werden.

Die relative Wartezeiterparnis für die Kunden ist umso geringer, je größer die Schalteröffnungszeit ist, da die durchschnittliche Wartezeit durch Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine bei bestimmten Schalteröffnungszahlen bei geringer Verkehrsdichte relativ weniger reduziert wird als bei hoher Verkehrsdichte.

Die Reduzierung der durchschnittlichen Wartezeit ist nicht der einzige Vorteil, der durch Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine für die Kunden erzielt werden kann. Es wird außerdem die Wartezeit der Kunden während der Bedienung selbst entsprechend der Reduzierung der durchschnittlichen Bedienungszeit durch die schnellere Abfertigung der Zahlkarten-Kunden verringert. Werden alle Zahlkarten-Kunden maschinell bedient, geht die durchschnittliche Bedienungszeit von 0,8305 min auf 0,7220 min für alle Kunden zurück.

3. Vergleich der Warte- und Schalteröffnungszeiten bei optimaler Zahl geöffneter Schalter

Der im vorigen Kapitel vorgenommene Vergleich der verschiedenen Schalterorganisationen im Hinblick auf die Kundenwartezeiten bei gleichen Schalteröffnungszahlen bezog sich auf den nach Kriterium 1 bzw. 2 optimalen Zustand für ein Allzwecksystem mit einer Zahlkartenannahme-Maschine. Ein sinnvoller Vergleich der Effizienz der verschiedenen Schalterorganisationen setzt jedoch voraus, daß für jede Schalterorganisation die Schalter optimal, also wie in Tabelle 14 (S. 126) wiedergegeben, besetzt sind.

Dieser Vergleich soll nunmehr vorgenommen werden.

a. Vergleich von Ist-Organisation und Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine

a. nach Kriterium 1

Bestimmt man auch für die Ist-Organisation die Schalteröffnungszahlen nach Kriterium 1, dann ergeben sich die in Tabelle 18 (S. 135) in der letzten Spalte dargestellten durchschnittlichen Wartezeiten. Aus dieser Tabelle lassen sich die wöchentlich mindestens notwendigen Schalteröffnungszeiten (Dienstzeiten) und Kundenwartezeiten für die 17156 beobachteten Kunden leicht errechnen. Sie sind in Tabelle 20 (S. 140) wiedergegeben.

Die durch Allzweckorganisation erzielbare Zeit- bzw. Kostenersparnis kommt jetzt nicht nur den Postkunden, sondern auch der Post zugute: Die Wartezeit der Kunden bis zum Bedienungsbeginn reduziert sich von 134 Stunden bei Ist-Organisation auf 112 Stunden bei Allzweckorganisation. Die Schalteröffnungszeit verringert

Tabelle 18 - Durchschnittliche Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter, wenn die Zahl der zu eröffnenden Schalter für jede dieser Organisationsformen nach Kriterium 1 bestimmt wird¹⁾

pro 30 min ein- treffende Kunden	wochentliche Häufigkeit	Allzweckorg. mit 1 Zk-Annahme-Masch.		Allzweckorg. ohne Zk-Annahme-Masch.		Ist-Organisation	
		Schalterzahl	Ø Wartezeit (1/100 min)	Schalterzahl	Ø Wartezeit (1/100 min)	Schalterzahl	Ø Wartezeit (1/100 min)
25	0,12	2	8	2	12	2	27
30	0,13		12		18		36
35	0,20		18		26		46
40	0,25		24		36		59
45	0,31		31		47	3	24
50	0,40	3	40	3	74		30
55	0,51		52		19		36
60	0,63		70		25		43
65	0,77		16		32		50
70	0,93	3	27	4	42	4	60
75	1,12		34		56		71
80	1,33		42		80		24
85	1,58		51		18		28
90	1,82		64	4	23		32
95	2,08	4	19		29		38
100	2,39		23		36		44
105	2,69		28		46		51
110	3,07		34	5	59	5	59
115	3,28	5	41		80		70
120	3,57		49		20		28
125	3,63		59		25		32
130	4,05		70		31		36
135	4,28	5	18	6	38	6	47
140	4,45		22		47		54
145	4,57		26		61		62
150	4,66		31		78		72
155	4,65		38	6	21	7	31
160	4,57	6	45		26		34
165	4,45		54		31		38
170	4,28		65		38		43
175	4,05		23		48		49
180	3,83	7	28	7	60	8	55
185	3,57		33		75		63
190	3,28		38		22		71
195	3,07		45		27		31
200	2,69		53	8	32	9	34
205	2,39	7	64		39		38
210	2,08		21		48		43
215	1,82		24		59		48
220	1,58		28		74		53
225	1,33	8	33	9	23	9	60
230	1,12		39		27		62
235	0,93		46		32		31
240	0,77		54		39		34
245	0,63		64		47		37
250	0,51	8	24	9	58		42
255	0,40		28		71		47
260	0,31		33		23		52
265	0,25		38		28		58
270	0,20		44		33		66
275	0,13	9	52		40		30
280	0,12		62		47		33

¹⁾ Kriterium 1: durchschnittliche Wartezeit kleiner gleich durchschnittliche Bedienungszeit

sich von 300 Stunden bei Ist-Organisation auf 273,5 Stunden bei Allzweckorganisation. Insgesamt ergibt sich nicht mehr wie bei gleichen Schalteröffnungszahlen eine wöchentliche Zeitersparnis von 117 Stunden, sondern eine Ersparnis von 48,5 Stunden.

Auf ein Jahr umgerechnet entspricht das einer Wartezeitersparnis für die Kunden von 52×22 Stunden = 1144 Stunden und einer Ersparnis an Dienstzeitstunden der Schalterbeamten für die Post von $52 \times 26,5$ Stunden = 1378 Stunden.

β. nach Kriterium 2

Bestimmt man auch für die Ist-Organisation die Schalteröffnungszeiten nach Kriterium 2, dann ergeben sich die in Tabelle 19 (S. 137) in der letzten Spalte dargestellten durchschnittlichen Wartezeiten. Die aus dieser Tabelle berechnete Kundenwartezeit und Schalteröffnungszeit pro Woche ist in Tabelle 20 (S. 140) wiedergegeben.

Die Wartezeit der Kunden bis zum Bedienungsbeginn reduziert sich danach von 64 Stunden bei Ist-Organisation auf 50 Stunden bei Allzweckorganisation. Die Schalteröffnungszeit verringert sich von 341,5 Stunden bei Ist-Organisation auf 308,5 Stunden bei Allzweckorganisation. Insgesamt ergibt sich eine wöchentliche Zeitersparnis von 47 Stunden.

Auf ein Jahr umgerechnet entspricht das einer Wartezeitersparnis für die Kunden von 52×14 Stunden = 728 Stunden und einer Ersparnis an Dienstzeitstunden für die Post von 52×33 Stunden = 1716 Stunden.

Die Ersparnis ist also nach Kriterium 2 für die Post größer und für die Kunden kleiner als nach Kriterium 1. Das Qualitätsniveau des Schalterdienstes dagegen ist

Tabelle 19 - Durchschnittliche Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter, wenn die Zahl der zu eröffnenden Schalter für jede dieser Organisationsformen nach Kriterium 2 bestimmt wird¹⁾

pro 30 min ein- treffende Kun- den	wöchent- liche Häufig- keit	Allzweckorg. mit 1 Zk-An- nahme-Masch.		Allzweckorg. ohne Zk-An- nahme-Masch.		Ist-Organisa- tion	
		Schal- ter- zahl	Ø Warte- zeit (1/100 min)	Schal- ter- zahl	Ø Warte- zeit (1/100 min)	Schal- ter- zahl	Ø Warte- zeit (1/100 min)
25	0,12	1	95		12	1	95
30	0,13		12		18		36
35	0,20		18	2	26	2	46
40	0,25		24		36		59
45	0,31	2	31		47		76
50	0,40		40		11		30
55	0,51		52		14		36
60	0,63		12	3	19	3	43
65	0,77		16		25		50
70	0,93		21		32		60
75	1,12	3	27		42		21
80	1,33		34		11		24
85	1,58		42		14		28
90	1,82		12	4	18	4	32
95	2,08		15		23		38
100	2,39		19		29		44
105	2,69	4	23		36		19
110	3,07		28		10		22
115	3,28		34		13	5	25
120	3,57		9		16		28
125	3,83		11	5	20		32
130	4,05		13		25		36
135	4,28		15		31		17
140	4,45	5	18		10		19
145	4,57		22		13	6	21
150	4,65		26		15		24
155	4,66		9	6	18		27
160	4,65		11		21		31
165	4,57	6	14		26		14
170	4,45		17		9		16
175	4,28		20		11	7	18
180	4,05		23	7	13		20
185	3,83		11		16		22
190	3,57		13		19		25
195	3,28		13		7		28
200	3,07	7	15		8		14
205	2,69		17	8	10		15
210	2,39		19		12	8	17
215	2,08		21		14		19
220	1,82		9		17		21
225	1,58		10		6		23
230	1,33		12		7		12
235	1,12		14		9		13
240	0,93		16		10		14
245	0,77		18		12		15
250	0,63		21		14		16
255	0,51	8	24	9	17	9	18
260	0,40		28		19		20
265	0,31		33		23		22
270	0,25		38		28		25
275	0,20		44		33		27
280	0,13		52		40		30
285	0,12		62		47		33

1) Kriterium 2: Minimierung der Zeit pro Abfertigung eines Kunden

nach Kriterium 2 sowohl bei Ist-Organisation als auch bei Allzweckorganisation besser als nach Kriterium 1, da nach Kriterium 2 die Zahl bei bestimmter Verkehrsdichte zu besetzender Schalter größer ist.

Ein Vergleich der nach Kriterium 1 bzw. 2 bei der Ist-Organisation zu eröffnenden Schalterzahlen mit den in der untersuchten Woche beobachteten Schalteröffnungszeiten (siehe Tabelle 4, S. 32) zeigt, daß die Schalteröffnungszeit im Untersuchungszeitraum mit 312,5 Stunden eher einem Vorgehen nach Kriterium 1 (300 Stunden) als nach Kriterium 2 (341,5 Stunden) entspricht. Die modellmäßig ermittelte Kundenwartezeit bei der Besetzung der Schalter im Untersuchungszeitraum und bei den in diesem beobachteten Kundenankünften pro 30 min beträgt etwa 160 Stunden. Sie liegt damit erheblich höher als die Kundenwartezeit bei nach Kriterium 1 oder 2 optimaler Schalterbesetzung (siehe Tabelle 20, S.140). Auch die Summe aus Kundenwartezeit und Schalteröffnungszeit ist erheblich größer.

b. Vergleich von Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine

a. nach Kriterium 1

Wird auch für ein Schaltersystem ohne Zahlkartenannahme-Maschine Kriterium 1 erfüllt, dann ergeben sich die in Tabelle 18 (S. 135) in der vorletzten Spalte dargestellten durchschnittlichen Wartezeiten. Die durch Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine bei Allzweckorganisation der Schalter erzielbare Zeit- bzw. Kostenersparnis kommt dann sowohl den Postkunden als auch der Post zugute: Die Wartezeit der Kunden bis zum

Bedienungsbeginn reduziert sich von 122 auf 112 Stunden, die Schalteröffnungszeit verringert sich von 300 auf 273,5 Stunden (siehe Tabelle 20, S. 140).

Insgesamt ergibt sich nicht mehr wie bei gleichen Schalteröffnungszahlen eine wöchentliche Zeitersparnis von 333 Stunden, sondern eine Ersparnis von 70,5 Stunden.

Auf ein Jahr umgerechnet entspricht das einer Wartezeitersparnis für die Kunden von 52×10 Stunden = 520 Stunden und einer Ersparnis an Dienstzeitstunden der Schalterbeamten für die Post von $52 \times 26,5$ Stunden = 1378 Stunden.

Hinzu kommt für die Kunden eine Ersparnis an Wartezeit während der Bedienung selbst durch Reduzierung der Bedienungszeiten von $17156 \times (0,8305 \text{ min} - 0,7220 \text{ min})$ = 34 Stunden wöchentlich oder 52×34 Stunden = 1768 Stunden jährlich. Die jährliche Ersparnis an Kundenwartezeit beträgt also insgesamt $(520 + 1768)$ Stunden = 2288 Stunden.

3. nach Kriterium 2

Wird auch für ein Schaltersystem ohne Zahlkartenannahme-Maschine Kriterium 2 erfüllt, dann ergeben sich die in Tabelle 19 (S. 137) in der vorletzten Spalte dargestellten durchschnittlichen Wartezeiten. Die durch Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine erzielbare Erhöhung der Effizienz des Schaltersystems kommt dann insbesondere der Post zugute: Die Wartezeit der Kunden bis zum Bedienungsbeginn erhöht sich von 46 auf 50 Stunden, die Schalteröffnungszeit dagegen reduziert sich von 354,5 auf 308,5 Stunden. Da die Bedienungszeit um 34 Stunden verringert wird, reduziert sich die Aufenthaltszeit der Kunden in der Schalterhalle allerdings immer noch um 30 Stunden (siehe Tabelle 20, S. 140).

Tabelle 20 - Kundenwartezeiten und Schalteröffnungszeiten pro Woche bei Besetzung der Schalter nach Kriterium 1 und 2 und bei beobachteter Schalterbesetzung

Schalterorganisation	Kriterium ¹⁾	Wartezeit bis zum Bedienungsbeginn + Bedienungszeit = Kundenwartezeit (Stunden)	Schalteröffnungszeit (Stunden)	Summe aus Kundenwartezeit und Schalteröffnungszeit (Stunden)
Allzweckorganisation mit einer Zahlkartennahnahme-Maschine	1	$112 + 203,5 = 315,5$	273,5	589,0
	2	$50 + 203,5 = 253,5$	308,5	562,0
Allzweckorganisation ohne Zahlkartennahnahme-Maschine	1	$122 + 237,5 = 359,5$	300,0	659,5
	2	$46 + 237,5 = 283,5$	354,5	638,0
Ist-Organisation	1	$134 + 203,5 = 337,5$	300,0	637,5
	2	$64 + 203,5 = 267,5$	341,5	609,0
	beobachtete Schalterbesetzung	$160 + 203,5 = 363,5$	312,5	676,0

Quelle: Tabelle 4 (S. 32), Tabelle 18 (S. 135) und Tabelle 19 (S. 137)

- 1) Kriterium 1: durchschnittliche Wartezeit $\leq$ durchschnittliche Bedienungszeit
 Kriterium 2: Minimierung der Zeit pro Abfertigung eines Kunden

Auf ein Jahr umgerechnet ergibt sich für die Kunden eine Zeitersparnis durch Installation einer Zahlkartennahnahme-Maschine von 52×30 Stunden = 1560 Stunden und für die Post eine Dienstzeitersparnis von 52×46 Stunden = 2392 Stunden.

G. Zusammenfassung der Ergebnisse und Schluß

Der Postbetriebsbereich "Schalterannahmedienst" wurde am Beispiel einer größeren Schalterstelle mit Hilfe der Warteschlangentheorie und unter Anwendung von Simulationsverfahren untersucht.

Für die ausgewählte Schalterstelle konnte gezeigt werden, daß Allzweckorganisation der Schalter der vorgefundenen teil-spezialisierten Organisation weit überlegen ist. Durch Ausweitung der Verfügbarkeit der Schalter auf alle Schaltergeschäfte können die Wartezeiten der Kunden und die Schalteröffnungszeit erheblich reduziert werden. Werden die Schalter so besetzt, daß die Summe aus Kundenwartezeit (einschließlich Bedienstungszeit) und Schalteröffnungszeit minimiert wird, dann vermindert sich die Wartezeit der Kunden durch Allzweckorganisation um 728 Stunden und die Dienstzeit der Schalterbeamten um 1716 Stunden jährlich, wenn man unterstellt, daß die jährliche Kundenankunftsverteilung gleich der in der Untersuchungswoche beobachteten ist.

Geht man davon aus, daß die jetzige Organisation sämtlicher Schalterstellen in der Bundesrepublik der Organisation der in dieser Untersuchung analysierten Schalterstelle hinsichtlich der entstehenden Wartezeiten in etwa gleichwertig ist, so unterstreicht dieses Ergebnis die Bedeutung einer warteschlangentheoretischen Untersuchung der Organisation des Schalterdienstes.

Das Ergebnis gilt bereits für eine sowohl bei der Ist-Organisation als auch bei der Allzweckorganisation optimale Anpassung der Schalterbesetzung an die Zahl der Kundenankünfte.

Diese optimale Anpassung ist nur möglich, wenn die Verteilung der Zahl der Kundenankünfte in den Schalterstellen bekannt ist und die Dienstplangestaltung für die Schalterbeamten eine Eröffnung und Schließung von Schaltern entsprechend der Verkehrsdichte zuläßt.

Die durch optimale Schalterbesetzung, einem allerdings praktisch kaum realisierbaren Extremfall, unabhängig von der Form der Schalterorganisation erzielbare Ersparnis zeigt eine Gegenüberstellung der Summen aus Kundenwartezeit und Schalteröffnungszeit für im Untersuchungszeitraum beobachtete und für optimale Schalteröffnungszeiten. Die Wartezeiten der Kunden für die beobachteten Schalteröffnungszeiten sind dabei nicht beobachtete, sondern modellmäßig ermittelte, so daß eine Vergleichbarkeit der Werte gegeben ist. Die Ersparnis beträgt 67 Stunden wöchentlich (siehe Tabelle 20, S. 140). Sie wäre damit noch größer als die durch Allzweckorganisation erzielbare wöchentliche Ersparnis von 47 Stunden.

Dieses Ergebnis macht deutlich, wie wesentlich die Kenntnis der im Tages-, Wochen- und Monatsablauf zu erwartenden Zahl eintreffender Kunden für eine effiziente Abwicklung des Schalterverkehrs ist.

Die Ergebnisse der Untersuchung haben weiterhin gezeigt, daß durch Automatisierung des Bedienungsvorgangs, also durch Installation von Maschinen, durch deren Einsatz die Bedienzeiten verkürzt werden,

eine erhebliche Reduzierung der Warte- und Schalteröffnungszeiten möglich ist. Durch die Installation einer Zahlkartenannahme-Maschine wird eine Ersparnis an Kundenwarte- und Schalteröffnungszeiten erzielt, die noch über der durch Allzweckorganisation erzielbaren Ersparnis liegt (siehe Tabelle 20, S. 140). Dieses Ergebnis zeigt, wie lohnend ein Versuch sein kann, weitere nach ihrer Häufigkeit bedeutende Schaltergeschäfte mit Hilfe von Maschinen abzuwickeln.

In diesem Zusammenhang erwies sich die Untersuchung über die günstigste Zahl der neben dem Maschinenschalter für manuelle Bedienung zur Verfügung stehenden Schalter als interessant: Es konnte gezeigt werden, daß sich die Wartezeiten der Kunden bei der günstigsten Zahl der für manuelle Bedienung zur Verfügung stehenden Schalter gegenüber der ungünstigsten bei bestimmter Verkehrsdichte etwa halbieren lassen.

Die Ergebnisse, insbesondere die Kurve der Summe aus durchschnittlicher Aufenthaltszeit der Kunden und durchschnittlicher Dienstzeit eines Schalterbeamten pro Kunde (siehe Abbildung 17, S. 123) zeigen, daß die bei der Abfertigung der Kunden entstehenden Kosten umso geringer sind, je größer die Zahl der Kunden ist, die bedient werden muß. Dieses Ergebnis ist von Bedeutung für die Planung der Größe und Zahl neuer Schalterstellen.

Verzeichnis der wichtigsten Symbole
=====

A	Faktor, mit dem die Varianz einer Zufallsvariablen multipliziert werden muß, wenn die Ausprägungen der Zufallsvariablen autokorreliert sind
c	Schalterzahl
$\bar{c}$	Zahl der den Kunden durchschnittlich zur Verfügung stehenden Schalter
$E(T_a)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen Zwischenankunftszeit
$E(T_b)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen Bedienungszeit
$E(T)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen Wartezeit
$E(T_w)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen "Wartezeit größer als null"
$h(t_{wj})$	absolute Häufigkeit der Stichprobenrealisierungen der Zufallsvariablen "Wartezeit größer als null" im Intervall j
l_m	relative Häufigkeit des Schaltergeschäftes m
n	Stichprobenumfang
n_w	absolute Zahl der Kunden in der Stichprobe, die eine Wartezeit größer als null haben
r_L	Stichproben-Autokorrelationskoeffizient für Lag L
s_t^2	Stichprobenvarianz der Zufallsvariablen Wartezeit
$s_{t_w}^2$	Stichprobenvarianz der Zufallsvariablen "Wartezeit größer als null"

t	Zeit
t_{a_i}	Stichprobenrealisierung der Zufallsvariablen Zwischenankunftszeit
t_{b_i}	Stichprobenrealisierung der Zufallsvariablen Bedienungszeit
t_i	Stichprobenrealisierung der Zufallsvariablen Wartezeit
t_{w_i}	Stichprobenrealisierung der Zufallsvariablen "Wartezeit größer als null"
t_{w_j}	Klassenmittelwert der Stichprobenrealisierungen der Zufallsvariablen "Wartezeit größer als null" im Intervall j
$\bar{t}$	arithmetisches Mittel der Stichprobenrealisie- rungen der Zufallsvariablen Wartezeit
$\bar{t}_w$	arithmetisches Mittel der Stichprobenrealisie- rungen "Wartezeit größer als null"
$V(T_a)$	Varianz der Zufallsvariablen Zwischenankunfts- zeit
$V(T_b)$	Varianz der Zufallsvariablen Bedienungszeit
$V(T)$	Varianz der Zufallsvariablen Wartezeit
$V(T_w)$	Varianz der Zufallsvariablen "Wartezeit größer als null"
$V(\bar{t})$	Varianz der arithmetischen Mittel der Stichpro- benrealisierungen der Zufallsvariablen Warte- zeit
$V(\bar{t}_w)$	Varianz der arithmetischen Mittel der Stichpro- benrealisierungen der Zufallsvariablen "Warte- zeit größer als null"
z_i	Stichprobenrealisierung der zwischen 0 und 1 gleichverteilten Zufallsvariablen Z

α	Parameter der Exponentialverteilung
ϵ	Parameter der Exponentialverteilung
λ	Ankunftsrate
μ	Bedienungsrate
ρ_L	Autokorrelationskoeffizient für Lag L
σ_t	Standardfehler der arithmetischen Mittel der Stichprobenrealisierungen der Zufallsvariablen Wartezeit
σ_{t_w}	Standardfehler der arithmetischen Mittel der Stichprobenrealisierungen der Zufallsvariablen "Wartezeit größer als null"
θ	Parameter der Exponentialverteilung

Verzeichnis der Abbildungen

=====

- | | |
|-------------|---|
| Abbildung 1 | Erhebungsformular für Kundenankünfte, Bedienungszeiten und Schaltergeschäfte |
| Abbildung 2 | Kundenankünfte pro 30 min |
| Abbildung 3 | Häufigkeitsverteilung der Kundenankünfte pro 30-Sekunden-Intervall |
| Abbildung 4 | Empirische Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 2 (Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten mit Maschine) |
| Abbildung 5 | Empirische Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 20 (Annahme von Postanweisungen und Zahlkarten ohne Maschine) |
| Abbildung 6 | Empirische Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 3 (Auskünfte und Geldwechselgeschäfte) |
| Abbildung 7 | Empirische Bedienungszeitverteilung für das Schaltergeschäft 5 (Einlagen und Rückzahlungen im Postsparkassendienst/Änderungen im Postsparkbuch) |
| Abbildung 8 | Gemeinsame Bedienungszeitverteilung für alle Schaltergeschäfte |
| Abbildung 9 | Schalterorganisations-Matrix für das untersuchte Postamt |

- Abbildung 10 Durchschnittliche Wartezeiten im Verhältnis zur durchschnittlichen Bedienungszeit für 1 bis 6 geöffnete Schalter bei gleicher Zahl pro Schalter ein-
treffender Kunden
- Abbildung 11 Realisierung einer stetigen Zufalls-
größe
- Abbildung 12 Realisierung einer Zufallsgröße mit
einer empirischen Verteilungsfunktion
- Abbildung 13 Stabilisierungsdauer der durchschnitt-
lichen Wartezeit
- Abbildung 14 Vergleich der modellmäßig bestimmten
mit den beobachteten durchschnittli-
chen Wartezeiten für die Ist-Organi-
sation
- Abbildung 15 Vergleich der bei Ist- und bei All-
zweckorganisation mit einer Zahlkar-
tenannahme-Maschine entstehenden
durchschnittlichen Wartezeiten
- Abbildung 16 Vergleich der durchschnittlichen War-
tezeiten bei Allzweckorganisation mit
einer und ohne Zahlkartenannahme-Ma-
schine
- Abbildung 17 Ermittlung der Zeit pro Abfertigung
eines Kunden
- Abbildung 18 Durchschnittskostenkurve pro Abferti-
gung eines Kunden für 1 bis 8 geöffne-
te Schalter

Abbildung 19 Verteilung der Kundenankünfte pro
30 min

Verzeichnis der Tabellen

=====

Tabelle 1	Kundenankünfte pro 30 min
Tabelle 2	Schaltergeschäfte, relative Häufigkeit der Schaltergeschäfte, arithmetische Mittel und Standardabweichungen der Bedienungszeiten
Tabelle 3	Empirische Häufigkeitsverteilungen der Bedienungszeiten
Tabelle 4	Schalteröffnungszahlen im Erhebungszeitraum
Tabelle 5	Vergleich der theoretischen und empirischen Verteilung der Autokorrelationskoeffizienten für Lags von 1 bis 30 für Modell I.1.
Tabelle 6	Verteilung der empirischen Autokorrelationskoeffizienten für Lags von 1 bis 30 für Modell II.1. und Modell II.2.
Tabelle 7	Vergleich der durch Simulation gefundenen Wartezeitverteilungen für die Modelle I.2., II.1. und II.2. mit entsprechenden Exponentialverteilungen
Tabelle 8	Vergleich der durch Simulation erhaltenen Ergebnisse mit den durch die analytische Näherungslösung erzielten Ergebnissen für die Ist-Organisation für 4, 6 und 8 Schalter

Tabelle 9	Durchschnittlich den Kunden bei der Ist-Organisation zur Verfügung stehende Zahl geöffneter Schalter ($\bar{c}$)
Tabelle 10	Vergleich der bei Ist- und bei Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine entstehenden durchschnittlichen Wartezeiten
Tabelle 11	Durchschnittliche Wartezeiten bei verschiedener Zahl von für manuelle Abfertigung der Zahlkarten-Kunden zur Verfügung stehenden Schaltern
Tabelle 12	Vergleich der durchschnittlichen Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine
Tabelle 13	Durchschnittliche Wartezeiten bei verschiedener Zahl von Zahlkartenannahme-Maschinen
Tabelle 14	Schalteröffnungszahlen bei verschiedener Organisation der Schalter nach Kriterium 1 und Kriterium 2
Tabelle 15	Durchschnittliche Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter, wenn die Zahl der zu eröffnenden Schalter nach Kriterium 1 für Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine bestimmt wird

- Tabelle 16 Durchschnittliche Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter, wenn die Zahl der zu eröffnenden Schalter nach Kriterium 2 für Allzweckorganisation mit einer Zahlkartenannahme-Maschine bestimmt wird
- Tabelle 17 Kundenwartezeiten und Schalteröffnungszeiten pro Woche bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter für die bei Allzweckorganisation der Schalter mit einer Zahlkartenannahme-Maschine nach Kriterium 1 und 2 bei bestimmter Verkehrsdichte zu eröffnenden Schalter
- Tabelle 18 Durchschnittliche Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter, wenn die Zahl der zu eröffnenden Schalter für jede dieser Organisationsformen nach Kriterium 1 bestimmt wird
- Tabelle 19 Durchschnittliche Wartezeiten bei Allzweckorganisation mit einer und ohne Zahlkartenannahme-Maschine und bei der Ist-Organisation der Schalter, wenn die Zahl der zu eröffnenden Schalter für jede dieser Organisationsformen nach Kriterium 2 bestimmt wird

Tabelle 20 Kundenwartezeiten und Schalteröffnungs-
zeiten pro Woche bei Besetzung der Schal-
ter nach Kriterium 1 und 2 und bei beob-
achteter Schalterbesetzung

Literaturverzeichnis

=====

- CHURCHMAN, C. W., R. L. ACKOFF und E. L. ARNOFF:
Operations Research. Eine Einführung in
die Unternehmensforschung. Wien - Mün-
chen 1961.
- COX, D. R., W. L. SMITH: Queues. London - New York 1961.
- EZEKIEL, M., K. A. FOX: Methods of Correlation and
Regression Analysis. New York - London
- Sydney, 3. Aufl. 1959.
- GEBHARD, R. F.: A Limiting Distribution of an Estimate
of Mean Queue Length. In: Operations
Research 11 (1963). S. 1000 - 1003.
- GNEDENKO, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrech-
nung. Berlin, 4. Aufl. 1965.
- GÖTTNER, R.: Probleme einer Postverkehrstheorie (Teil 2).
In: Wissenschaftliche Zeitschrift der
Hochschule für Verkehrswesen "Friedrich
List" in Dresden 33 (1965).
- GOLDBERGER, A. S.: Econometric Theory. New York - Lon-
don - Sydney 1964.
- GUMBEL, H.: Waiting Lines with Heterogeneous Servers.
In: Operations Research 8 (1960). S. 504
- 511.

GUTENBERG, E: Einführung in die Betriebswirtschaftslehre. Wiesbaden 1958.

Kassatjänstens organisation. Förslag med allmänna riktlinjer för kassatjänstens organisation utarbetat inom generalpoststyrelsens organisationsavdelning i samarbete med Statistiska Forskningsgruppen vid Stockholms universitet. In: Postala Meddelanden, utgivna av Kungl. Generalpoststyrelsen, 32 (1962). Nr 2.

KAUFMANN, A., R. CRUON: Les phénomènes d'attente. Paris 1961.

KOENIGSBERG, E: Queueing with Special Service. In: Operations Research 4 (1956). S. 213 - 220.

KOENIGSBERG, E.: On Jockeying in Queues. In: Management Science (Series A) 12 (1966). S. 412 - 436.

KOXHOLT, R.: Die Simulation - ein Hilfsmittel der Unternehmensforschung. München - Wien 1967.

KRISHNAMOORTHY, B.: On a Poisson Queue with two Heterogeneous Servers. In: Operations Research 11 (1963). S. 321 - 330.

KRISHNAMOORTHY, B.: On the Concept of FIFOV in Queues. In: Operations Research 13 (1965). S. 365 - 374.

- LEE, A. M.: Applied Queueing Theory. London - Melbourne - Toronto - New York 1966.
- LITTLE, J. D. C.: A Proof for the Queueing Formula $L = W$. In: Operations Research 9 (1961). S. 383 - 387.
- MEYER, H. A. (Hrsg.): Symposium on Monte Carlo Methods. New York - London 1956.
- MORAN, P. A.: The Theory of Storage. London - New York 1959.
- MORSE, P.: Queues, Inventories and Maintenance. New York 1958.
- PAGE, E. S.: On Monte Carlo Methods in Congestion Problems: II. Simulation of Queueing Systems. In: Operations Research 13 (1965). S. 300 - 305.
- PRABHU, N. U.: Queues and Inventories. New York - London - Sydney 1965.
- ROSENBERG, W. J., A. I. PROCHOROW: Einführung in die Bedienungstheorie. Leipzig 1964.
- ROSENQUIST, B. A.: Die Organisation des Schalterdienstes der Postämter. In: Union Postale 12 (1964). S. 198AL - 200AL.
- SAATY, Th. L.: Elements of Queueing Theory. New York - Toronto - London 1961.

- SAATY, Th. L.: Mathematical Methods of Operations Research. New York - Toronto - London 1959.
- SAATY, Th. L.: Seven More Years of Queues. In: Naval Research Logistics Quarterly 13 (1966). S. 447 - 476.
- SASIENI, M., A. YASPAN und L. FRIEDMAN: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung. Operations Research. Würzburg 1967.
- SCHNEEWEISS, H.: Zur Theorie der Warteschlangen. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung NF 12 (1960). S. 471 - 507.
- SCHNEEWEISS, H.: Monte-Carlo-Simulation eines einfachen Warteschlangenmodells. In: Ablauf- und Planungsforschung 2 (1961). S. 231 - 237.
- Simulationsmodelle für ökonomisch-organisatorische Probleme. Schriftenreihe Datenverarbeitung. Institut für Datenverarbeitung Dresden (Hrsg.). Köln - Opladen 1968.
- TINTNER, G.: Handbuch der Ökonometrie. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1960.
- WEINBERG, F.: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie Anwendungen im Operations Research. Berlin - Heidelberg - New York 1968.

Lebenslauf

Am 28. Juli 1941 wurde ich als Sohn des Staatsanwalts Heinz Gürtler und seiner Ehefrau Elisabeth Gürtler, geb. Arndt, in Königsberg/Ostpr. geboren. Ich besitze die deutsche Staatsangehörigkeit.

Von Herbst 1947 bis Ostern 1951 besuchte ich die Volksschule und ab Ostern 1951 bis zur Reifeprüfung im März 1960 den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig des Helmholtz-Gymnasiums in Bielefeld. Im Wintersemester 1960/61 nahm ich mein volkswirtschaftliches Studium an der Universität in Göttingen auf. Nach weiterem Studium an den Universitäten in München und Kiel legte ich am 25. Oktober 1965 die Prüfung als Diplom-Volkswirt an der Universität in Münster ab. Seit dem 1. Januar 1966 bin ich zunächst als wissenschaftliche Hilfskraft, danach als Verwalter der Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik der Universität Münster tätig.

